

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 530.122

На правах рукописи

НУРТАЕВА ГАЛИЯ КАДЫРХАНОВНА

Бранные решения в многомерных теориях гравитации

6D060400 – Физика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты:
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Джунушалиев В.Д.
доктор PhD, профессор
Ким С.В.

Республика Казахстан
Алматы, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

	ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	3
	ВВЕДЕНИЕ	4
1	СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ	8
2	МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ	14
2.1	Альтернативные теории гравитации.....	14
2.2	$f(R)$ – теория	20
2.3	Модифицированная теория гравитации Гаусса - Бонне.....	28
2.4	Модифицированная гравитация: нелинейная связь, космическое ускорение и проблема иерархии.....	30
2.4.1	Проблема космологической постоянной в гравитации.....	32
2.4.2	Проблема иерархии в модифицированной теории гравитации.....	34
3	МНОГОМЕРНАЯ ГРАВИТАЦИЯ	38
3.1	Многомерное пространство – время.....	38
3.1.1	Подход Калуцы – Клейна	40
3.1.2	Модель Калуцы –Клейна. Общий случай.....	43
3.2	ADD-модель: масштаб и число дополнительных измерений.....	50
3.3	Модель Рандалла – Сундрума.....	52
4	МИР НА БРАНЕ	58
4.1	Топологические дефекты – доменная стенка.....	58
4.2	Бранные решения в модифицированной $f(R) \sim R^n$ гравитации	66
4.2.1	Брана в 5-ти мерном пространстве – времени.....	66
4.2.2	Thick branes в 6-мерном пространстве-времени.....	75
4.3	Thick D –branes.....	80
4.3.1	Уравнения и общие свойства в $f(R) \sim R^n$ теории.....	82
4.3.2	Численные результаты расчетов.....	84
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	93
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	95
	Приложение	105

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

OTO	– общая теория относительности
MTГ	– модифицированная теория гравитации
ТЭ	– темная энергия
TBO	– теория великого объединения
ADD	– Аркани-Хамеда-Димопулоса-Двали модель
AdS	– антидеситтеровское пространство
Четырехмерные тензорные индексы обозначаются латинскими и греческими буквами i, k, l, μ, ν, \dots и пробегают значения 0, 1, 2, 3;	
λ	– константа самодействия;
R	– скалярная кривизна пространства;
R_{ik}	– тензор Риччи;
R_{klm}^i	– тензор Римана или четырехмерный тензор кривизны;
g_{ik}	– метрический тензор;
T_{ik}	– тензор энергии-импульса;
Γ_{kl}^i	– символы Кристоффеля;
G_{AB}	– многомерная метрика, $A, B = 0, 1, 2, 3, \dots, n$;
S	– действие;
ds^2	– метрика;
L	– лагранжиан обычного вещества;
k	– гравитационная константа в n - мерном пространстве;
H	– параметр Хаббла;
a	– масштабный фактор;
$d\Omega_{n-1}^2$	– метрика на единичной $(n - 1)$ – мерной сфере.

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы

В диссертационной работе представлены результаты расчетов гипотетических астрофизических объектов в модифицированных 4-х, многомерных теориях гравитации, таких как: доменные стенки и thick branes.

Актуальность темы

В основополагающих физических теориях, таких как общая теория относительности и электродинамика Максвелла значимыми являются регулярные решения. Регулярными решениями будем называть такие решения, которые имеют конечную энергию и у которых соответствующие поля являются конечными во всем пространстве: в центре и на бесконечности в частности. Такие решения в вышеуказанных теориях являются достаточно редкими. Для примера можно рассмотреть решения типа черных дыр, где эти решения являются сингулярными: в центре черной дыры имеется сингулярность – точечная масса, точечный заряд и так далее. В рамках классической и квантовой электродинамики невозможно получить регулярные решения без источников. Причиной этого является линейность уравнений Максвелла. Только электромагнитные волны являются единственными решениями уравнений Максвелла без источников.

С целью получения регулярных решений необходимо по всей видимости, чтобы полевые уравнения были нелинейными. Следовательно в общей теории относительности существует возможность получения регулярных решений. В действительности такие решения существуют, например, для скалярных полей: это так называемые бозонные звезды. Другими примерами могут являться такие объекты как доменные стенки, браны, кротовые норы.

Впервые решения доменных стенок появляются в теориях, где потенциал скалярного поля имеет изолированные минимумы. При данных условиях доменной стенкой является поверхность, разделяющая различные минимумы скалярного потенциала. В этом случае скалярное поле меняется в пространстве и стремится к одному минимуму в одном направлении и к другому минимуму в противоположенном направлении. Область быстрого изменения скалярного поля соответствует доменной стенке. В приближении тонкой стенки изменение скалярной плотности энергии поля локализуется на поверхности доменной стенки и заменяется дельта-функцией. В случае, когда все поля постоянны с каждой стороны стенки, то есть они находятся в минимумах потенциала, доменные стенки называются вакуумными доменными стенками.

Важным направлением в исследованиях современной Вселенной в последние годы стало рассмотрение теории мира на бране (n -мерных гиперповерхностей, вложенных в многомерное внешнее пространство-время). В рамках теорий мира на бране удастся естественным образом описать иерархию масс элементарных частиц, а также решить ряд других проблем теории элементарных частиц. В то же время теории такого типа с успехом применяются и при моделировании темной

энергии. Браны могут играть значительную роль в квантовой гравитации.

В связи с вышеуказанным возникает необходимость исследования решения в модифицированных теориях гравитации, описывающих доменные стенки и браны, поскольку все их свойства являются актуальными для понимания свойств этих астрофизических объектов.

На основании вышеизложенного, диссертационная работа посвящена исследованию доменных стенок и thick branes.

Связь темы диссертации с планами научных работ

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами фундаментальной научно-исследовательской работы (НИР) КН МОН РК «Программно-целевое финансирование научных исследований» по теме: «Исследование фундаментальных проблем физики плазмы и плазмopodobных сред», ИРН программы: BR05236730. (2017-2020гг., номер государственной регистрации №0115РК02918, шифр 0263/ПЦФ-14).

Цель работы

Получить и подробно исследовать регулярные решения в модифицированных теориях гравитации, описывающих 4-мерные доменные стенки в 4-мерном и n -мерные thick branes в D -мерном пространствах - временах в рамках модифицированных теорий гравитации типа $f(R) = -\alpha R^n$.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- Используя уравнения модифицированной теории гравитации, получить уравнения, описывающие доменные стенки и thick branes в 4-х мерном и многомерном случаях;

- На основе уравнений, описывающих плоско – симметричные 4-х и многомерные метрики в модифицированных теориях гравитации, получить регулярные решения, описывающие доменные стенки и thick branes;

- Исследовать свойства доменных стенок и thick branes.

Объект исследования

Модифицированные теории гравитации и плоско-симметричные решения в них.

Предмет исследования. Полевые уравнения модифицированных теорий гравитации типа $f(R) = -\alpha R^n$.

Методы исследования. Численные и аналитические методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений модифицированных теорий гравитации, описывающих доменные стенки и thick branes.

Новизна работы. Новизна и оригинальность исследований заключается в том, что **впервые**:

- получены новые плоско – симметричные решения в 4-х и многомерных модифицированных теориях гравитации;

- исследованы свойства доменных стенок и thick branes в модифицированных теориях гравитации;

– продемонстрировано, что возможность появления в модифицированных теориях гравитации доменных стенок и thick branes существенно определяется видом функции $f(R) = -\alpha R^n$.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Получение новых регулярных решений в гравитационных теориях является интересной и необходимой задачей для понимания природы гравитации. Доменные стенки и thick branes являются гипотетическими объектами, которые возможно будут обнаружены в будущем. Поэтому исследование их свойств является важной задачей в теоретической физике.

Положения, выносимые на защиту:

1. Все регулярные решения уравнений, полученных на основе модифицированной теории гравитации для доменных стенок и thick branes в 4-х мерном и многомерном случаях имеют антидесситеровскую асимптотику;

2. Регулярные решения модифицированной теории гравитации $f(R) = -\alpha R^n$ имеют особую точку, необходимую для существования браны, расположенную в ее центре и существующую при следующих параметрах n : $1 < n < 2$;

3. Регулярные вакуумные решения в модифицированной теории гравитации $f(R) = -\alpha R^n$ для D – branes с коразмерностью $=1$ не требуют присутствия материи.

Личный вклад автора заключается в том, что весь объем диссертационной работы, выбор метода исследования, решения задач и численные расчеты выполнены автором самостоятельно. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научными руководителями.

Достоверность и обоснованность полученных результатов. В диссертационной работе использовались известные многомерные модифицированные теории гравитации и апробированные математические методы численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений в пакетах Wolfram Mathematica и Maple. Полученные результаты на основе численных расчетов согласуются с качественным исследованием полученных дифференциальных уравнений, а также с исследованиями, проведенными ранее другими авторами. Также достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждаются публикациями в журналах дальнего зарубежья с высокими импакт-факторами и в изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, и в трудах международных научных конференций ближнего и дальнего зарубежья.

Апробация диссертационной работы. Результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались:

– на Международной конференции «10th Alexander Friedman International Seminar on Gravitation and Cosmology and 4th Symposium on the Casimir Effect» (2019, Saint-Petersburg, Russia);

– на Международной конференции «57th Workshop on Gravity and Cosmology» (2019, Jecheon, South Korea);

- на Международной научной конференции «Абдильдинские чтения: Актуальные вопросы современной физики» (2018, Алматы, Казахстан);
- на Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби Әлемі» (2018, 2019, Алматы, Казахстан);
- а также обсуждались с профессором Ким С.В. (Сеул, Южная Корея) в рамках международного сотрудничества.

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликованы 9 печатных работ: 3 – в журналах из Перечня ККСОН МОН РК для опубликования основных результатов диссертаций на соискание степени PhD и 2 статьи в журналах дальнего зарубежья с высокими импакт-фактором, входящих в международный информационный ресурс Web of Knowledge (Thomson Reuters, США) и Scopus (Elsevier, Нидерланды); 4 работы в сборниках Международных научных конференций.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников из 174 наименований и приложения, содержит 94 страницы основного компьютерного текста, включая 35 рисунков.

1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Долгое время в физике господствовала теория согласно которой Вселенная всегда была почти такой же, как сейчас т.е. в стационарном состоянии. Астрономия была статичной: описывались звезды, создавалась их классификация, изучались движения планет и комет, что было, очень важно для науки, но вопрос об эволюции Вселенной не ставился. Согласно классической космологии Ньютона, пространство и время однородны, изотропны, абсолютны и бесконечны. Вселенная стационарна, только конкретные космические системы могут трансформировать и видоизменять, но не мир в целом.

Несколько веков в научном обществе сохранялись и оставались без изменения убеждения о неизменности мира, и именно эти убеждения, имеющие столь значимую историю, сыграли решающую роль. Альберт Эйнштейн попытался применить созданную им общую теорию относительности к описанию Вселенной, точнее, к объяснению ее неизменности. Поскольку непосредственно из уравнений Эйнштейна неизменности Вселенной не следовало, он добавил к своим уравнениям так называемый Λ - член, отражающий существование гипотетических сил, препятствующих силам тяготения, и в 1917 году построил стационарную модель Вселенной.

В 1920 году выдающийся физик и математик А.А. Фридман вывел решения уравнений Эйнштейна, показав в своих исследованиях, что в случае отсутствия Λ - члена Вселенная эволюционирует. После длительной дискуссии Эйнштейн признал этот результат, что нашло отражение в его статье, опубликованной в 1923 году [1]. Научная общественность, в течение длительного времени считала выводы Фридмана скорее математическим курьезом, чем глубоким физическим результатом. Признание Эйнштейна не означало признания всей научной общественности. Общественное мнение изменилось только после экспериментального наблюдения эффекта разбегания галактик в 1929 году американским астрономом Э. Хабблом. Произошел быстрый переворот в общественном мнении: Вселенная не стационарна. Достижения Фридмана и Хаббла, можно сказать без преувеличения, оказались главным поворотным пунктом в истории астрономии и физики. Эти достижения покончили с преобладающим заблуждением о стационарности Вселенной. Важность этого результата выходит далеко за пределы констатации факта. Признание эволюции Вселенной в пространстве - времени повлекло за собой и другое общезначимое следствие – это существование эволюции таких космических объектов, как галактика и звезды. Признание изменчивости этих объектов конечно же пришло, разумеется, не сразу. Понадобилось не менее двух десятилетий после работ Фридмана и Хаббла, прежде чем идея неизменности Вселенной сменилась идеей всеобщей эволюции.

Одно из удивительных открытий - ускоренное расширение Вселенной было обнаружено в 1998 году. Обнаруженное явление явилось большим сюрпризом для

физиков и даже некоторое время было подвергнуто критике. Первоначально, об ускоренном расширении Вселенной заговорили после наблюдений за сверхновыми типа Ia. Однако ученые не сразу пришли к факту, что Вселенная расширяется с ускорением. Согласно ранним космологическим моделям общей теории относительности предполагалось, что скорость расширения Вселенной замедляется. Гравитация является притягивающей силой для всех известных форм материи. Это приводит к тому, что согласно теории гравитации Эйнштейна, Вселенная расширяется с замедлением. Этот процесс аналогичен замедлению шарика, брошенному вверх идвигающемуся с замедлением за счет действия силы притяжения.

Для того, чтобы получить работающую стандартную космологическую модель мы можем использовать общую теорию относительности Эйнштейна в космологических масштабах, но для этой цели мы вынуждены изучать, проводить исследования для феноменологических моделей инфляции без понимания фундаментальной природы инфлатона, а также вводить загадочные тёмные сектора в теорию – тёмную материю, тёмную энергию и др. Строго говоря, мы не знаем, почему происходит это ускоренное расширение. Существует различные методы, описывающие ускоренное расширение Вселенной. Многие ученые считают, что одним их методов объяснения этого явления является предположение о существовании "темной энергии".

Мы также не знаем, что такое "темная энергия" – то ли свойство вакуума, то ли какое-то новое физическое поле. Она представляется в виде материи с очень экзотическими свойствами: имеет очень необычное соотношение между давлением и плотностью этой материи, а также обладает отрицательным давлением. Кроме того, такая форма материи должна крайне слабо взаимодействовать с электромагнитным излучением. Если все эти условия выполняются, мы можем утверждать, что это темная энергия.

В настоящее время имеется много моделей темной энергии: газ Чаплыгина, фантомная материя, квинтэссенция и так далее. С другой стороны, имеется и другой подход при объяснении ускоренного расширения Вселенной. Это совершенно новый подход при описании ускоренного расширения Вселенной, так как мы не пользуемся старыми методами ОТО, а модифицируем их. Другими словами, при описании ускоренного расширения Вселенной мы прибегаем к модифицированным теориям гравитации. Помимо этого, также может иметься возможность получения в рамках этих теорий всех астрофизических объектов, предсказываемых общей теорией относительности: доменных стенок, тонких и толстых бран, космических струн, кротовых нор, бозонных звезд и другие.

Гипотеза, что наша вселенная представляет собой четырехмерную пространственно-временную поверхность, вложенную в некое фундаментальное многомерное пространство в последние годы стала достаточно популярной. Эта гипотеза стала базовой основой для большого количества моделей физики за пределами Стандартной Модели, призванных найти ответы на ряд вопросов

физики элементарных частиц, таких как объяснение структуры фермионного сектора, проблема иерархии, а также малости космологической постоянной. Предполагается, что размер предполагаемых дополнительных измерений достаточно велик, и они могут, в принципе, проявить себя в научных экспериментах мировых лабораторий ближайшего будущего и/или в астрофизических наблюдениях.

Доменной стенка, которая порождается фоновыми скалярными и/или гравитационными полями, и когда их вакуумные конфигурации обладают нетривиальной топологией является браной. Здесь необходимо сказать о материи, которая взаимодействует с этими фоновыми полями, она локализуется в определенной окрестности доменной стенки, а также может быть охарактеризована некоторой ненулевой толщиной. Соответственно по этой причине - «ненулевая толщина» иногда позволяет употреблять название «толстая брана» («thick brane») [2].

При более детальном изучении локализации материи на этих доменных стенках можно получить результаты, которые представляют особый интерес, поскольку они могут быть ценным ключом к некоторым вопросам в низкоэнергетической физике, а также установить связь с моделями фундаментальных бран и прояснить сущность предельного перехода к бране нулевой толщины.

Вероятность того, что наше пространство имеет больше трех измерений, вызывает обширный интерес уже на протяжении многих десятилетий. М-теория и теория струн которые включают в себя гравитацию, являются самыми главными факторами для рассмотрения пространства как многомерного. Эти теории характеризуются в пространстве-времени с числом измерений больше четырех. Исследования феноменологического характера параллельно с развитием фундаментальной теории, привели к новому пониманию того, как могут способствовать решению известных проблем теории частиц (космологическая постоянная, проблема иерархии и др.). Особое внимание стало уделяться представлению о «мире на бране», в котором подразумевается локализация обычного вещества на трехмерном многообразии – «бране», вложенном в объемлющее многомерное пространство. В моделях мира на бране дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечно большой размер и могут приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам.

Для хронологического и системного описания настоящей Вселенной требуется осуществление глобализированной теории элементарных частиц и космологии в целом. В настоящее время продолжает оставаться одним из актуальных исследований - рассмотрение модели Вселенной в многомерной теории, в которой наш мир представляет собой брану в искривленном 5-ти мерном пространстве - времени. При этом одна координата является временной, а четыре - пространственными. Впервые способ объединения общей теории относительности и теории электромагнитного поля Максвелла на основе гипотезы о многомерности

нашего мира был предложен в работах Калуцы и Клейна в 1920 годах [3,4]. Аналогичные идеи, спустя некоторое время, были использованы в унифицированных описаниях в четырех известных фундаментальных взаимодействиях в рамках теории суперструн с несколькими дополнительными размерами пространства. В теории суперструн, как и в случае теории Калуцы и Клейна, предполагается что наше четырехмерное пространство-время появляется после спонтанной компактификации многомерного пространства. В то же время, модели Вселенной с некомпактными (и даже бесконечными) дополнительными размерностями были рассмотрены в работах [5-8]. Согласно этой теории предполагается, что мы живем на тонкой бране, которая встроена в некоторое многомерное пространство и материя так или иначе локализована на бране [6]. Существование дополнительных измерений позволяют разрешить некоторые проблемы в физике высокой энергии, такие проблемы как иерархия массы, стабильность протона и др.

В определенном случае, когда вакуум состоит из (энергетически вырожденных) различных компонент, доменные стенки соответствуют некоторому конкретному типу топологических дефектов. Существует предположение, что в ранней Вселенной такие доменные структуры могли бы сформироваться посредством механизма Киббла [9], вследствие чего различные регионы горячей Вселенной остыли в разные изолированные минимумы потенциала. Согласно предложенной теории в [9, 10] доменные стенки также могут образовываться как границы вакуумных(истинных) пузырьков, созданных при квантовом распаде ложного вакуума. В дополнение, Вселенная может быть рождена вследствие квантового процесса туннелирования из ничего [11 – 16] в разные домены со стенками между ними.

В силу того, что доменная стенка является протяженным объектом, пространство - время в области доменной стенки испытывает сильное влияние этой доменной стенки. Общая гравитационная масса становится отрицательной вследствие того, что напряжение уменьшает гравитационную массу, а в случае доменной стенки, где напряжение равно плотности энергии и где есть два пространственных направления, связанных с напряжением и только одно временное направление, связанное с плотностью энергии,

Решение уравнений Эйнштейна для гравитационного поля, создаваемого тонкой плоской доменной стенкой, было впервые найдено впервые Виленкиным [17] в линейном приближении. В этом предложенном решении, по обеим сторонам стенки энергия вакуума или космологическая постоянная равна нулю. В данном случае это решение не может ничего сказать о глобальной структуре гравитационного поля, так как линейное приближение для гравитационного поля нельзя применять на больших расстояниях. Но в тоже время, физический смысл этого приближенного решения оставался неясным, причинность он не соответствует ни одному точному статическому решению уравнений Эйнштейна. В литературе [18] было доказано, что на самом деле, таких решений не

существует. Точные тонкостенные решения были найдены в работе [19], в которых метрика зависит от времени; это $(2 + 1)$ -мерное пространство деСиттера, вложенное в пространство - время Минковского. Согласно этим координатным преобразованиям можно видеть, что точное тонкостенное решение Виленкина представляет собой часть ускоренной сферы, которая приходит из бесконечности, отражается и уходит обратно на бесконечность [20, 21].

Браны могут быть разделены на тонкие и толстые браны. Тонкие браны имеют дельта-подобную локализацию материи на бране [5,6]. С реалистической точки зрения, брана должна иметь некоторую толщину. Понятие "толщина" браны дает новые возможности и новые проблемы [22]. Такая брана должна удовлетворять двум главным требованиям: 1) решения должны быть регулярными и асимптотически плоскими, или de Sitter (анти - de Sitter); 2) обычная материя должна быть локализована к бране.

Особый интерес представляет рассмотрение различных моделей со скалярными полями. Это связано с тем, что скалярные поля находят широкое применение в теориях элементарных частиц, астрофизике и космологии. Интерес к скалярным полям обусловлен, в том числе, и относительной простотой получаемых уравнений и решений в моделях с их использованием. Это позволяет проводить качественный анализ уравнений и находить достаточно ясную физическую интерпретацию получаемых результатов исходя из аналогий из других областей физики. Большинство моделей тонких бран используют скалярные поля в рамках теории гравитации Эйнштейна [22]. Однако, можно было бы ожидать существование брано - подобных решений также для некоторых видов модифицированных теорий гравитаций, называемых теориями гравитаций с высшими производными. В таких теориях действие гравитационного лагранжиана Эйнштейна - Гильберта дополняется дополнительными членами, которые являются инвариантами кривизны [23]. Эти рассмотренные модификации основаны на эффекте взаимодействия полей квантовой материи с классическим гравитационным полем. Это позволяет избежать начальной космологической особенности и построить регулярные космологические модели ранней Вселенной [24-27]. Позже было показано, что в такого рода моделях может существовать эпоха инфляции [28].

Особенность этих теорий заключается в том, что плотностью лагранжиана является уже не скалярная кривизна R (как в общей теории относительности), а некоторая нелинейная функция от скалярной кривизны $f(R)$. Самое удивительное в этих теориях, что модифицированные теории гравитации объясняют не только инфляцию на ранней стадии Вселенной, так и современное ускоренное расширение Вселенной [29 -30].

Компактные астрофизические объекты: доменные стенки, толстые браны о которых и будет идти речь в данной диссертационной работе, были исследованы в работах [2, 5-8, 31-35]. Тот факт, что модифицированные теории гравитации очень хорошо описывают объекты как доменные стенки, толстые браны в многомерном

пространстве времени не ставит под сомнение актуальность этой темы. Актуальность данной темы также заключается в получении плоско - симметричных решений, описывающих доменные стенки и толстые браны в любом N-мерном пространстве-времени.

2 МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

2.1 Альтернативные теории гравитации

В настоящее время в теоретической физике существует и активно развивается множество направлений, которые предлагают описание космологической эволюции в рамках модифицированных (расширенных) теорий гравитации. Делая обзор этих теорий, трудно выделить предпочтительные направления, так как конкретные подходы имеют разные степени исследованности и признания.

Модифицированные теории гравитации или альтернативные теории гравитации - это теории, обобщающие теорию гравитации Эйнштейна. Целью альтернативных теорий является описание гравитации в рамках модифицированной теории, при этом предложить лучшее описание явлений в космологии, а также не войти в противоречие с имеющимися экспериментальными данными на данный момент.

Общая теория относительности имеет ряд проблем, поэтому всегда существует несколько причин для создания новой теории или начала проверки старых теорий новыми экспериментальными данными. Следовательно, существуют новые возможности проверить или, может быть, обобщить теорию гравитации, сделанную А. Эйнштейном в 1916 году. Модифицированные теории гравитации не совпадают с общей теорией относительности. Тем не менее, часто теории гравитации, особенно квантовые, которые совпадают с общей теорией относительности, не называются «альтернативными».

В XVII века доминирующей теорией гравитации была теория Ньютона. В настоящее время в основном физики рассматривают общую теорию относительности как основную теорию гравитации. Тем не менее, общая теория относительности имеет много существенных проблем. Итак, физика должна найти решения этих проблем и представить новые теории гравитации, которые впоследствии привели к модифицированным теориям.

Современные теории гравитации можно разделить на следующие основные классы:

- Метрические теории. К ним относятся общая теория относительности, релятивистская теория гравитации Логанова и другие;
- Теории, альтернативные классической теории Ньютона. Гравитация Ле-Сажа и модифицированная динамика Ньютона и другие;
- Неметрические теории. Теория Эйнштейна-Картана;
- Скалярно-тензорные теории;
- Теория супергравитации и теории струн;
- Скалярные теории. Теория Нордстрема.

Процессы обобщения теории гравитации начались недавно. Здесь следует обратить внимание на две основные причины этого процесса. Это были развитие квантовой теории и открытие сильных и слабых взаимодействий. Попытки объединить эти две теории микро- и макромиров не так далеки от тех дней,

которые были начаты в предыдущем столетии, потому что в современной физике все еще существуют несоответствия.

После утверждения общей теории относительности были предприняты попытки модифицировать некоторые из теорий, например, идея добавления спина в уравнения поля, имеющая более свободную степень, путем добавления других параметров. Чтобы выбрать правильную теорию из множества других, эта теория проверяется экспериментально. Более того, эксперименты развиваются параллельно с теорией, и есть необходимость улучшить или полностью изменить общую классическую теорию, когда она дает разные результаты с экспериментом, чтобы не потерять следы научных открытий. Итак, принцип соответствия должен быть проверен для каждой новой теории.

Среди кандидатов на новую теорию гравитации имеется теория струн. Однако она потеряла свою популярность, поскольку она не представила никаких экспериментальных исследований, подтверждающих эту теорию. Сделаем некоторое отступление и рассмотрим теорию струн. Как мы знаем, теория струн - это может быть ключ к объединению гравитации с другими взаимодействиями. Данная проблема создания единой теории всего на данный момент является одной из самых обсуждаемых проблем в научном мире [31].

Теория струн пытается объединить: сильные и слабые ядерные взаимодействия, электромагнитную силу и гравитацию – в одну силу. В нашем мировоззрении эти силы проявляют себя как четыре разных явления. Согласно теории струн считается, что в ранней Вселенной, когда были сверхестественно высокие уровни энергии, все эти явления образовывались струнами, взаимодействующими друг с другом. Данная теория удивительно красиво описывает Вселенную как вездесущие нити энергии - квантовые струны. Эта гипотеза предсказывает суперсимметрию во всем. Другими словами, она предсказывает, что между фермионами и бозонами имеется некая связь, которая называется суперсимметрией. При суперсимметрии для каждого бозона должен существовать фермион и для каждого фермиона – бозон. Главным преимуществом суперсимметрии является то, что она позволяет упрощать уравнения, исключая некоторые переменные. Если решать без суперсимметрии, то уравнения приводят к физическим противоречиям, таким как бесконечные значения и энергетические уровни. Первые уравнения теории струн давали странные результаты. В них появлялись тахионы — частицы с отрицательной массой, которые двигались быстрее скорости света.

Еще одной замечательной идеей, которая была предложена в середине 1980-х годов, является модифицированная гравитация, дополнительной пятой силой (или более), хотя это и не было доказано экспериментально. Причины последних измененных теорий почти все космологичны, они пытаются заменить или связать такие физические понятия как «инфляция», «темная материя» и «темная энергия».

Законы гравитации никогда не тестировались непосредственно на весах,

больших, чем Солнечная система. Теории альтернативной гравитации могут возникать также как альтернатива космологической постоянной (или, в некоторой точке, темной энергии) чтобы объяснить ускоренное расширение Вселенной. Как будет сказано в следующей главе, одним из способов объяснения ускоренного расширения Вселенной является предположение о существовании таинственной темной энергией, но есть еще одно вероятное объяснение, которое изменяет саму теорию гравитацию.

Как мы знаем, функция Лагранжа в общей теории относительности является кривизной R в первой степени, это необходимо отметить, поскольку она рассматривается как частный случай модифицированных теорий. Чтобы улучшить эту теорию, здесь вводятся новые $f(R)$ лагранжианы. Более подробно данная теория будет рассматриваться в следующем разделе. Кроме того, мы можем использовать функцию Лагранжа, зависящую от разных видов материи, только путем изменения соответствующей функции. Некоторые из модифицированных теорий гравитации были разработаны для объяснения гравитации без использования экзотической материи. Поэтому нам необходимо конкретизировать различные модификации гравитационной теории.

Одним из важнейших открытий астрофизиков в завершение двадцатого века стало открытие расширения Вселенной с ускорением. Для более наглядного понимания ускоренного расширения Вселенной, возьмем два воздушных шарика (рисунок 2.1). И при этом размер одного из шаров немного меньше другого. Далее надуем эти шары до больших размеров и представим их в качестве модели "Вселенной". Также в этой системе отсчета имеется наблюдатель, которого мысленно "поместим" на поверхность шара. Несомненно, возникает вопрос: заметит ли наблюдатель, что шар расширяется и при том ускоренно, или нет?

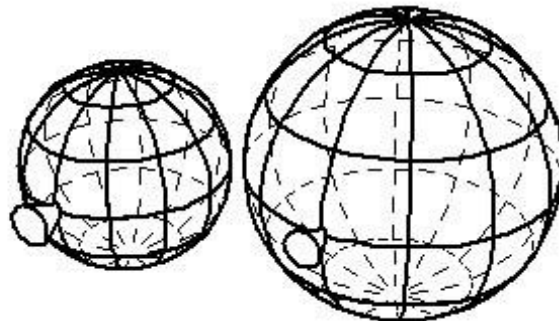


Рисунок 2.1 - Два воздушных шарика

Многие исследователи считают, что расширение Вселенной с ускорением связано с темной энергией. Но что мы знаем об этом загадочном объекте? Впервые о ней заговорили в девяностые года при изучении сверхновых. Природа темной энергии неизвестна, и она описывается космологической постоянной, которая была введена Альбертом Эйнштейном. В 1916 году, сто лет назад, Вселенная еще считалась статической. Вселенная расширяется с постоянной

скоростью. В 1998 году были представлены данные анализа вспышек сверхновых первого типа [36]. Было доказано, что Вселенная расширяется с ускорением. Происходит это из-за неизвестного вещества, которая называется «темной энергией» и занимает почти 70% материи Вселенной (Рисунок 2.2). В настоящее время во многих лабораториях мира пытаются получить частицы, из которых возможно состоит темная энергия, но пока все эти эксперименты безуспешны. Поэтому структура, свойства и природа темной энергии пока еще остаются неизвестными.

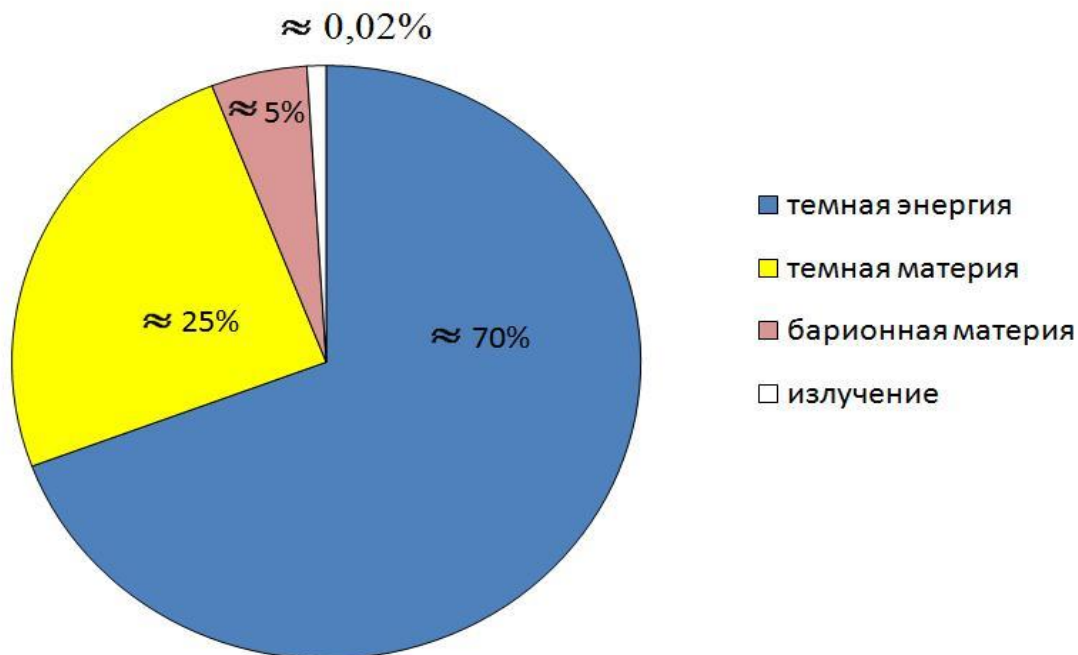


Рисунок 2.2 – Распределение массы Вселенной

В 2016 году была вычислена скорость расширения Вселенной, но результаты оказались неожиданными: Вселенная расширяется с большей скоростью, чем ранее предполагали астрофизики. В среде исследователей разгорелись споры о природе этого ускоряющегося расширения, которая привела к гипотезе о существовании темной энергии и её влиянии на скорость расширения пределов вселенной [37].

Лауреат Нобелевской премии Адам Рисс рассчитал расстояние до пульсирующих цефеид в близких друг к другу галактиках для того, чтобы определить, какова скорость расширения Вселенной. Эти исследования показали что галактики на расстоянии не меньше трех миллионов световых лет могут отдаляться со скоростью почти 73 км/с. Полученный результат был удивителен: орбитальные телескопы, тот же «Планк» получили около 69 км/с. Астрофизики не в силах дать ответ на вопрос: Почему зафиксирована такая разница? В

действительности нам ничего не известно о происхождении темной материи, на которую опирается теория расширения Вселенной.

Темную радиацию как еще один фактор «разгона» Вселенной обнаружили астрономы с помощью «Хаббла». Темное излучение, как предполагают, появилось в самом начале образования Вселенной. Тогда в ней было больше энергии, а не материи. Темное излучение внесло свой вклад в расширении границы Вселенной. Расхождения в определении скорости ускорения были из-за неизвестной природы этого излучения, считают исследователи. Дальнейшая работа «Хаббла» должна сделать наблюдения более точными [38]. Такой сценарий астрофизики рассматривают уже несколько десятилетий, данные космической обсерватории «Планк» говорят, что это далеко не только предположения. Результаты исследований были опубликованы в 2013 году. «Планк» замерил «эхо» Большого взрыва, которое появилось, когда Вселенной было около 380 000 лет, а также температура не была постоянной. «Планк» определил и «состав» Вселенной: почти 5 % - звезды, космическая пыль, космический газ, галактики; почти 27 % - масса темной материи; около 70 % - темная энергия [39].

В процессе развития науки многие исследователи начали искать возможность исключить Бога из своих взглядов как первопричину появления вселенной. В результате этого появилось много различных теорий возникновения вселенной. Самыми популярными из них являются теория «Большого взрыва». В процессе обоснования теории «Большого взрыва» была создана одна из фундаментальных теорий эволюционистов - «Расширяющаяся вселенная». Данная теория говорит о том, что происходит расширение космического пространства в масштабах вселенной, которое наблюдается благодаря постепенному отдалению галактик одной от другой.

На сегодняшний день для измерения скорости отдаления галактик используют закон Хаббла, использующий теорию о «Красном смещении», которое в свою очередь основывается на эффекте Доплера. Давайте посмотрим, что собой представляют данные понятия:

- Закон Хаббла — закон, связывающий красное смещение галактик и расстояние до них линейным образом. Данный закон имеет вид:

$$cz = H_0 D ,$$

где z - красное смещение галактики; H_0 - коэффициент пропорциональности, называемый "постоянная Хаббла"; D - расстояние до галактики. Одним из важнейших элементов для закона Хаббла является скорость света.

Наименее изученная и самая фундаментальная сила природы - это гравитационное взаимодействие. В самой ранней вселенной в теории относительности гравитационная теория диктовала эволюцию Вселенной, в настоящее время для описания инфляции и темной энергии используются модифицированные теории гравитации. Другими словами, модифицированная

гравитация, представляющая собой обобщение общей теории относительности, должна последовательно описывать раннюю инфляцию и ускорение в позднем времени.

Модифицированная гравитация может служить объяснением для темной материи. Она также может описывать переход от торможения к ускорению Вселенной, и может быть полезна для проблем физики высоких энергий. Следует отметить, что, модифицированные гравитационные уравнения движения, которые будут получены в следующей главе и будут описывать доменные стенки, *thick branes*, являются дифференциальными уравнениями с производными 4-го порядка.

Фактически, во многих существующих подходах к космологическим вопросам в модифицированной гравитации уравнения сводятся к дифференциальным уравнениям второго порядка. Существует ряд популярных моделей модифицированной гравитации: $f(R)$, теория Гаусса-Бонне, теория струн, нелокальная гравитация, $f(R)$ гравитации Хорава-Лифшица и перенормируемая ковариантная гравитация. Отметим, что литература по $f(R)$ - гравитации обширна, и обзоры этой теории приведены в [40-46].

Обычно в таких теориях, как общая теория относительности, мы исходим из теории, определяемой действием, и решаем соответствующие уравнения движения. Одними из самых широко используемых являются гравитация $f(R)$ типа и гравитация Гаусса-Бонне $f(G)$. Гравитация Гаусса-Бонне $f(G)$ относится к скалярным теориям гравитации. Предполагается что эта теория может описывать позднюю эпоху космического ускорения. Другим подходом к модифицированной гравитации является $f(T)$, где T – скаляр кручения.

Недавно Tiberiu Harko и др. [47] предложили теорию $f(R, T)$ с учетом гравитационного лагранжиана как функции скаляра Риччи R и тензора T . Они получили уравнение движения пробной частицы и гравитационного уравнения поля в метрическом формализме. Модели гравитации $f(R, T)$ могут служить оправданием позднего космического ускоренного расширения Вселенной. Многие авторы [48-53] изучали разные космологические модели в теории $f(R, T)$. В этой главе, мотивированной вышеуказанными наблюдательными фактами, мы изучаем $f(R)$ теорию. Она представляет значительный интерес в качестве возможного объяснения для наблюдаемого позднего ускоряющего расширения Вселенной. В этом разделе мы рассмотрим модифицированные теории гравитации, которые имеют производные выше второго порядка.

Обобщения $f(R)$ уравнений Эйнштейна выведены из лагранжевой функции вида:

$$L = \sqrt{-g}f(R) \quad (2.1)$$

Уравнения поля, полученные из такого действия, как правило, ковариантны и лоренц-инвариантны по тем же причинам, что и уравнения Эйнштейна. Выведем теперь уравнения поля в метрическом вариационном подходе. При интегрировании последнего уравнения по 4-общему объему, включая член

материи и изменяющийся относительно него $g_{\mu\nu}$ мы получаем:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + L_{matter}], \quad (2.2)$$

где $f(R)$ - аналитическая функция Риччи скаляра R , g обозначает детерминант метрики $g_{\mu\nu}$, а L_{matter} - стандартный лагранжиан для материи. Уравнения движения для модифицированной гравитации, соответствующие рассмотренной метрике при варьировании действия по метрике $g_{\mu\nu}$, задаются формулой:

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - R_{\mu\nu} f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) = -\frac{k^2}{2} T_{matter\mu\nu}, \quad (2.3)$$

где

$$f'(R) = \partial f(R) / \partial R \quad (2.4)$$

и T - тензор энергии-импульса материи.

В случае отсутствия материи и учитывая свойство ковариантности тензора Риччи уравнения движения (2.3), соответствующие действию (2.2) могут быть преобразованы в

$$0 = 2f(R) - Rf'(R) \quad (2.5)$$

Если уравнения для астрофизических объектов описываются двумя скалярными полями, то тензор энергии-импульса материи имеет следующим вид:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - g_{\mu\nu} L_{matter}. \quad (2.6)$$

Лагранжиан для двух скалярных полей имеет вид:

$$L_{matter} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (2.7)$$

где потенциальная энергия двух полей ϕ и χ :

$$V(\phi, \chi) = \frac{\lambda_1}{4} (\phi^2 - m_1^2) + \frac{\lambda_2}{4} (\chi^2 - m_2^2) + \frac{1}{2} \phi^2 \chi^2, \quad (2.8)$$

где m_1 и m_2 - массы скалярных полей, λ_1, λ_2 - произвольные константы связи.

2.2 $f(R)$ – теория

Различные модифицированные гравитации рассматриваются как гравитационные альтернативы для темной энергии. Эти теории имеют довольно богатую космологическую структуру: они могут описывать эффективную (космологическую константу, квинтэссенцию или фантомную) позднюю эпоху с

возможным переходом от замедления к ускорению благодаря гравитационным условиям, которые увеличиваются с уменьшением скалярной кривизны. Некоторые из таких теорий могут пройти экспериментальные тесты Солнечной системы.

Модифицированный гравитационный подход очень хорошо применяется в приложениях для позднего ускорения Вселенной и темной энергии. Можно с уверенностью сказать что, модифицированная гравитация обеспечивает гравитационную альтернативу для темной энергии т.е. она может служить основой для унифицированного объяснения темной материи. Некоторые космологические эффекты (например, кривые вращения галактик) можно объяснить в рамках модифицированной гравитации. Космическое ускорение объясняется просто фактом расширения Вселенной, где некоторые субдоминантные слагаемые (например, $1/R$) могут стать существенными при малой кривизне.

Сама модифицированная гравитация описывает вполне естественную унификацию ранней инфляции и более позднее ускорение за счет различной роли гравитационных слагаемых, соответствующих большой и малой кривизне. Отдельные модели модифицированной гравитации предсказываются теорией струн, а также M-теорией.

Если предположить, что вселенная вступает в фантомную фазу, модифицированная гравитация беспрепятственно может без необходимости введения экзотического вещества (типа скаляра с неправильным знаком кинетического слагаемого или идеальной жидкости с параметром уравнения состояния меньше чем 1) передать переход от нефантомной фазы к фантомной. Как известно, фантомная фаза в модифицированной гравитации часто изображается временной, следовательно, Большого Разрыва там обычно не ожидается.

Большой Разрыв — один из сценариев дальнейшей судьбы Вселенной, который основывается на уравнении состояния космологической модели и предполагает разрыв всех существующих структур, вплоть до атомов. Если природа темной энергии такова, что параметр $w < -1$, то наш мир ждет скоростная и эпическая гибель в виде Большого Разрыва, сценарий которого предложил немецкий космолог Роберт Колдуэлл. Как и в случае с гипотезой энергии вакуума, некоторое время все космические тела будут отдаляться друг от друга. Таким образом, с нашего небосвода исчезнет внушительный ряд звезд, вместе с целыми галактиками.

Модифицированная гравитация вполне естественно описывает переход от замедления к ускорению эволюции Вселенной. Ожидается, что модифицированная гравитация будет полезна и применима в физике высоких энергий: например для объяснения проблемы иерархии или унификации GUTs с гравитацией. В нынешнюю эпоху существует много вариантов модифицированной гравитации, которые могут быть жизнеспособными теориями, конкурирующими с Общей

теорией относительности, несмотря на довольно жесткие ограничения из тестов Солнечной системы. Тем не менее, более серьезная проверка таких теорий необходима для того, чтобы подогнать их под различные данные наблюдений и точные тесты Солнечной системы [54].

Среди большого количества предложений расширенной теории гравитации, $f(R)$ теория получила большой интерес в связи с такими уникальными преимуществами как простейшая модификация инвариантов кривизны с производными высокого порядка, которые требуют перенормировки. Так как некоторые другие теории с инвариантами кривизны подобно $R_{MN}R^{MN}$ и $R_{MNPQ}R^{MNPQ}$ неизбежно приведут к нестабильности Остроградского [55]. $f(R)$ теория является вероятно одной из самых известных теорий гравитации, которая позволяет перейти к производным высокого порядка [56].

Можно рассмотреть модель thick branes в пятимерном пространстве в метрике теории $f(R)$ взаимодействующей с каноническим скалярным полем, лагранжиан которого выглядит следующим образом [56]:

$$L_M = -\frac{1}{2}g^{MN}\partial_M\phi\partial_N\phi - V(\phi).$$

Действие может быть представлено в следующем виде:

$$S_{met} = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2k_5^2} f(R) - \frac{1}{2}g^{MN}\partial_M\phi\partial_N\phi - V(\phi) \right]. \quad (2.9)$$

Уравнения гравитационного поля

$$f_R R_{MN} - \frac{1}{2}f g_{MN} - (\nabla_M \nabla_N - g_{MN} \square^{(5)})f_R = k_5^2 T_{MN}, \quad (2.10)$$

$$\square^{(5)} \phi \equiv g^{MN} \nabla_M \nabla_N \phi = V_\phi, \quad (2.11)$$

где $\square^{(5)}$ - даламбертиан, f_R и V_ϕ определяются как $f_R \equiv \frac{df(R)}{dR}$ и $V_\phi \equiv \frac{dV(\phi)}{d\phi}$. Здесь рассмотрены плоские браны в каноническом скалярном поле, для которых метрика дана в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN} dx^M dx^N = e^{2A(y)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2) = \\ &= e^{2A(z)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Затем уравнения полей (2.10) и (2.11) преобразуются в следующем виде

$$f + 2f_R(4A'^2 + A'') - 6f'_R A' - 2f''_R = k_5^2(\phi'^2 + 2V), \quad (2.13)$$

$$-8f_R(A'' + A'^2) + 8f'_R A' - f = k_5^2(\phi'^2 - 2V), \quad (2.14)$$

$$4A'\phi' + \phi'' = V_\phi, \quad (2.15)$$

где штрихи представляют собой производные по координате y . Это система представляет собой производные четвертого порядка в метрике. В общем, было бы чрезвычайно трудно решить аналитически эти нелинейные дифференциальные уравнения четвертого порядка. Однако, широко распространено мнение, что $F(R)$ теория эквивалентна теории Бранса-Дикке с параметром $\omega_0 = 0$. Следовательно, было бы более удобно работать с теорией Бранса-Дикке, которая содержит только производные второго порядка. Это направление изучалось в работе [57]. Некоторые решения *thick branes* высокого порядка представлены в работах [35, 58]. К сожалению, эти решения не идеальны, так как имеют сингулярность и являются числовыми.

Первое точное решение в системе более высокого порядка было дано в работе [59], где рассматривалась определенная модель

$$f(R) = R + \gamma R^2. \quad (2.16)$$

При решении трех уравнений (2.13) - (2.15) [93], только два являются независимыми, из – за того, что сохраняется тензор энергии-импульса [60]. Это означает, что можно решить эти уравнения задав одну из 3-х функций, таких как фактор искривления $e^{A(y)}$, скалярное поле $\phi(y)$ и скалярный потенциал $V(\phi)$. Предварительно можно выбрать решение функции $e^{A(y)}$, поскольку производная четвертого порядка действует только на $A(y)$. С таким выбором необходимо решить уравнения поля второго порядка. Чтобы получить асимптотически AdS_5 геометрию, можно предположить, что фактор искривления равен как в [59]

$$e^{A(y)} = \text{sech}(ky). \quad (2.17)$$

Тогда скалярное поле и скалярный потенциал могут быть определены как [59]

$$\phi(y) = v \tanh(ky), \quad (2.18)$$

$$V(\phi) = \lambda^{(5)}(\phi^2 - v^2)^2 + \frac{\Lambda_5}{2k_5^2}, \quad (2.19)$$

где параметры связаны между собой следующим образом

$$\lambda^5 = \frac{29}{98} k_5^2 k^2, v = \sqrt{\frac{3}{29} \frac{7}{k^5}}, \quad \lambda^5 = -\frac{318}{29} k^2, \quad \gamma = \frac{3}{232 k^2}. \quad (2.20)$$

Этот тип потенциала ϕ^4 с вакуумом расположен на $\phi = \pm v$. Видно, что пространственные границы $y = \pm\infty$ стремятся к минимуму скалярного потенциала.

В работах Zhong и Liu [61] были рассмотрены простые геометрические thick branes без скалярного поля. Они получили решения для следующего типа $f(R)$

$$f(R) = \Lambda_5 + c_1 R - \frac{c_2}{k_2} R^2 + \frac{c_3}{k^4} R^3, \quad (2.21)$$

$$e^{A(y)} = \cosh^{-20}(ky), \quad (2.22)$$

где Λ_5 пятимерная космологическая константа, и c_n безразмерные константы. Точные решения в D мерности были получены Lu и др.[62]. Одним из решений масштабного фактора является

$$e^{A(y)} = [e^{bDy} \cosh^{-2}(ky)]^{\frac{2}{\alpha D}}. \quad (2.23)$$

Соответствующий $f(R)$ имеет сложную форму.

Стабильность тензора возмущения общего вида была проанализирована в работах [63]. Учитывая возмущение, метрику можно записать в виде

$$ds^2 = e^{2A(z)} [(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu + dz^2], \quad (2.24)$$

где $h_{\mu\nu}$ ковариантный бесследный тензор $\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0 = \partial_\mu h_\nu^\mu$. Разлагая в ряд получаем

$$h_{\mu\nu}(x^\rho, z) = \left(a^{-3/2} f_R^{-1/2} \right) \epsilon_{\mu\nu}(x^\rho) \psi(z), \quad (2.25)$$

где $a \equiv e^{2A}$ и можно сделать вывод о том, что мода Калуцы-Клейна $\psi(z)$ удовлетворяет следующему уравнению Шредингера [63]:

$$[-\partial_z^2 + W(z)]\psi(z) = m^2 \psi(z), \quad (2.26)$$

где эффективный потенциал представлен в следующем виде

$$W(z) = \frac{3}{4} \frac{(\partial_z a)^2}{a^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial_z^2 a}{a} + \frac{3}{2} \frac{\partial_z a \partial_z f_R}{a f_R} - \frac{1}{4} \frac{(\partial_z f_R)^2}{f_R^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial_z^2 f_R}{f_R}. \quad (2.27)$$

Можно проверить, что это уравнение можно разложить как

$$\mathcal{K}\mathcal{K}^\dagger\psi(z) = m^2\psi(z) \quad (2.28)$$

с

$$\mathcal{K} = \partial_z + \frac{3}{2} \frac{\partial_z a}{a} + \frac{1}{2} \frac{\partial_z f_R}{f_R}, \quad (2.29)$$

$$\mathcal{K}^\dagger = -\partial_z + \frac{3}{2} \frac{\partial_z a}{a} + \frac{1}{2} \frac{\partial_z f_R}{f_R}, \quad (2.30)$$

что гарантирует отсутствие моды гравитона с $m^2 < 0$. Нулевая мода гравитона (четырёхмерный безмассовый гравитон) может быть решена как

$$\psi_0 \propto (a^3 f_R)^{1/2}. \quad (2.31)$$

Необходимо обратить внимание, чтобы ψ_0 было действительным, f_R должен быть положительным. Это также позволяет избежать гравитационного (ghost) призрака. Восстановление четырёхмерной гравитации на бране требует нормализации нулевой моды гравитона, а именно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_0)^2 dz < \infty. \quad (2.32)$$

Эти условия могут определенно удовлетворять решениям, представленным в работе [59]. Таким образом может быть получена четырёхмерная гравитация.

Существует проблема, о которой следует здесь упомянуть. Приведенный выше анализ включал только тензорную моду. Поскольку полные возмущения содержат тензорную, векторную и скалярную моды анализ не завершен. Четырёхмерная гравитация подразумевает, что скалярная нулевая мода не должна быть локализованной. Для общей теории относительности, связанной со скалярным полем, скалярная нулевая мода не локализована. Однако в случае $f(R)$ – гравитации ситуация совершенно иная. Тензорные векторные моды аналогичны случаю общей теории относительности, тогда как скалярная мода сильно отличается. В системе более высокого порядка динамическое уравнение скалярной моды будет четвертого порядка, что подразумевает наличие фактически двух скалярных степеней свободы. Теорема $f(R)$ эквивалентна теории Бранса-Дикке. Основываясь на этом факте, скалярные возмущения теории могут быть исследованы в рамках скалярно-тензорной теории.

Одной из альтернатив темной энергии можно рассмотреть модифицированную гравитацию, действие которой представлено в следующем виде

$$f(R) = R - \frac{c}{(R - \Lambda_1)^n} + b(R - \Lambda_2)^m. \quad (2.33)$$

Предположим что коэффициенты $n, m, c, b > 0$, а также n, m могут быть дробными. Можно показать, что приведенная выше модель приводит к наблюдаемому космическому ускорению и соответствует тестам в пределах Солнечной системы [54].

Для действия (2.33) уравнение (2.5) имеет следующий вид:

$$0 = -R + \frac{(n+2)c}{(R-\Lambda_1)^n} + (m-2)b(R-\Lambda_2)^m. \quad (2.34)$$

В случае, когда $n = 1$ и $m = 2$

$$R = R_{\pm} = \frac{\Lambda_1 \pm \sqrt{\Lambda_1^2 + 12c}}{2}. \quad (2.35)$$

Если $c > 0$, то одно решение соответствует деситтеровскому, а другое антидеситтеровскому. Если $-\frac{\Lambda_1^2}{12} < c < 0$ и $\Lambda_1 > 0$ тогда оба решения выражаются в деситтеровском пространстве. Отсюда появляется естественная возможность унификации ранней инфляции с поздним ускорением [64]. Слагаемые с производными более высокого порядка выступают в пользу ранней инфляции, в то время как слагаемое $1/R$ поддерживает космическое ускорение. Модель нашей Вселенной и антидеситтеровского пространства представлена на рисунке 2.3.

Исходя из метрики Вселенной Фридмана-Робертсона-Уолкера

$$ds^2 = -dt^2 + \hat{a}(t)^2 \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2. \quad (2.36)$$

можно определить параметр Хаббла через $H = \dot{\hat{a}}/\hat{a}$, а также можно пренебречь вкладом материи. В частности, когда в выражении (2.33) $n = 1, m = 2, \Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ и в виду малости кривизны, можно получить решение формулы (2.2)

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - R_{\mu\nu} f'(R) - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f'(R) - g_{\mu\nu} \nabla^2 f'(R) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.37)$$

как $\hat{a} \propto t^2$, который соответствует результатам в [65].

Если вселенная в настоящее время расширяется с помощью вышеуказанного закона, кривизна вселенной в данный момент должна быть меньше по сравнению с деситтеровской вселенной с $\Lambda_1 = 0$ в (2.35). Поскольку постоянная Хаббла вселенной в настоящее время равна $(10^{-33} \text{эВ})^{-1}$, параметр c , который соответствует μ^4 в [65], должен быть намного больше чем $(10^{-33} \text{эВ})^4$. Здесь рассмотрен общий случай $f(R)$ по (2.33) когда кривизна мала.

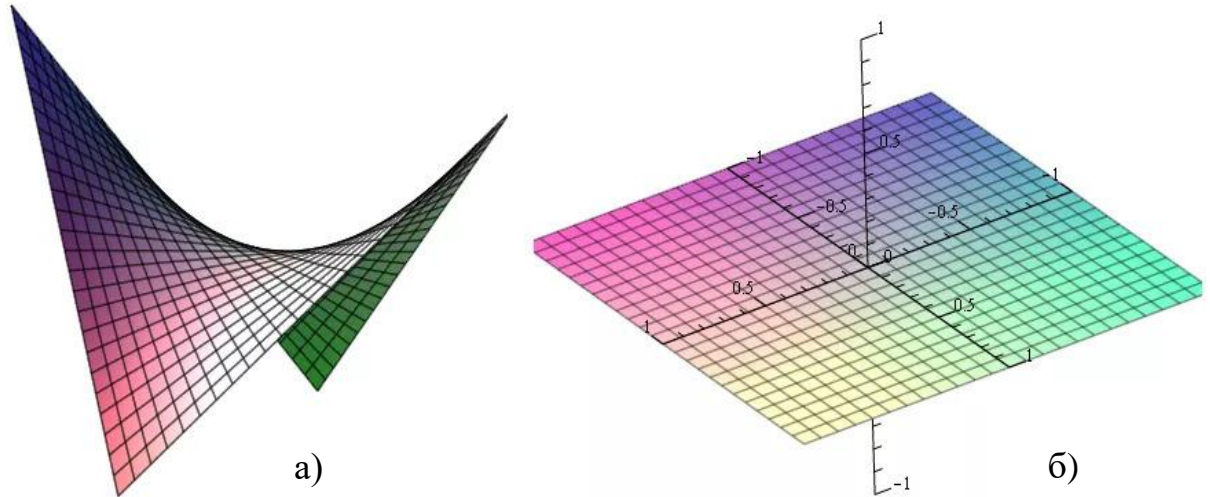


Рисунок 2.3 - а) Модель антидеситтеровского пространства
 б) Модель нашей Вселенной

Пренебрегая вкладом материи повторно и решая уравнение (2.2), было получено $\hat{a} \propto t^{\frac{(n+1)(2n+1)}{n+2}}$. На самом деле примечательно, что фактически любая отрицательная степень кривизны описывает космическое ускорение. Это дает свободу выбора модификации модели для достижения согласованности с экспериментальными данными ньютоновской гравитации.

С другой стороны, когда R - скалярная кривизна большая, мы получаем $\hat{a} \propto t^{-\frac{(m-1)(2m-1)}{m-2}}$. Когда $\frac{(m-1)(2m-1)}{m-2} > 0$ вселенная сжимается, но если изменить направление времени на $t \rightarrow t_s - t$, то инфляция происходит с обратным степенным законом и при $t = t_s$ размер вселенной не определяется. Примечательно, когда m является дробным или иррациональным и $1 < m < 2$, выражение \hat{a} все еще действительно и степень становится положительной, вселенная эволюционирует с (дробным) степенным законом расширения.

Модель, рассматриваемая в этой главе диссертации, кажется более согласованной чем модель, приведенная в источнике [65, 66] (для подробного изучения в ньютоновском пределе можно посмотреть в источниках [68-79]), так как эта модель работает в солнечной системе. Действительно, в литературе [80] объекты с маленьким гравитационным полем как Земля или Солнце были рассмотрены как в модели [65,66]. Показано, что система становится неустойчивой, а также это может вызвать неприемлемую силу между удаленными галактиками [81]. Как показано в источнике [67], добавляя положительную степень (больше чем 1) скалярной кривизны в действие, неустойчивость может

быть значительно улучшена. Более того, учет квантовых эффектов в модифицированной гравитации также действует против неустойчивости [82].

В работе [83] упомянуто, что модель $1/R$, которая эквивалентна некоторым скалярно-тензорным теориям гравитации [65,66], исключена как реалистичная теория из-за этих ограничений к таким теориям как теория Бранса-Дикке. В [67] показано, что путем добавления к действию квадратичного члена скалярной кривизны масса скалярного поля может быть отрегулирована так, чтобы она была очень большой, а скалярное поле может отделиться. Следовательно, после некоторых уточнений модифицированные теории гравитации проходят тесты солнечной системы. Дополнительно, при точных значениях некоторых параметров выше упомянутая модифицированная гравитация, имеет ньютоновский предел, которая не отклоняется значительно от общей теории относительности.

2.3 Модифицированная теория гравитации Гаусса-Бонне

В изучении (string-induced) струнно-индуцированной гравитации около начальной сингулярности роль взаимодействия Гаусса-Бонне со скаляром был весьма важен при возникновении несингулярной космологии [84, 85]. Теория струн или М-теория предсказывают появление слагаемых вселенной со степенями кривизны инвариантов в компактификации низко-энергетического эффективного действия. В источнике [54] предполагается, что теория темной энергии по всей вероятности может быть исследована в теории струн или в М-теории. Следовательно, взаимодействие гравитация - материя, предлагаемая фундаментальной теорией может стать важным направлением в изучении слабой кривизны вселенной.

Этот раздел посвящен изучению взаимодействия гравитационной теории Гаусса-Бонне со скалярным полем в поздней вселенной. Здесь необходимо сказать, что если скаляр является каноническим при отсутствии потенциального слагаемого, то каждое слагаемое само по себе не может вызывать эффективную фантомную позднюю вселенную. Только в том случае когда скаляр является фантомным или когда скаляр является каноническим с ненулевым потенциалом она может производить эффективную эпоху квинтэссенции, объясняя текущее ускорение. Аналогично квантовым эффектам это явление привлекательно, тем что это может иметь важное влияние на Большой разрыв (Big Rip). В этой работе [54] особое внимание отдается экспоненциальной скалярной связи Гаусса-Бонне и экспоненциальному скалярному потенциалу. Рассмотрение подобных функций и их роль в поздней космологии может рассматриваться и в других работах [92].

Рассмотрим модель скалярного поля ϕ взаимодействующего с гравитацией. В теории струн слагаемое пропорционально инварианту Гаусса - Бонне

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Действие дано в следующем виде

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2k^2} R - \frac{\gamma}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + f(\phi)G \right\}, \quad (2.38)$$

$$V = V_0 e^{-\frac{2\phi}{\phi_0}}, \quad f(\phi) = f_0 e^{\frac{2\phi}{\phi_0}}.$$

где $\gamma = \pm 1$. Для канонического скаляра, $\gamma = 1$ когда слагаемое Гаусса-Бонетти не включено и скаляр ведет себя как фантом когда $\gamma = -1$.

Используя метрику вселенной Фридмана - Робертсона - Уолкера

$$\omega_{eff} = \frac{p}{\rho} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}, \quad (2.39)$$

и принимая условия

$$a = \begin{cases} a_0 t^{h_0}, & \text{когда } h_0 > 0 \text{ (квинтэссенция)} \\ a_0 (t_s - t)^{h_0}, & \text{когда } h_0 < 0 \text{ (фантом)} \end{cases}$$

могут быть получены следующие решения

$$V_0 t_1^2 = -\frac{1}{k^2(1+h_0)} \left\{ 3h_0^2(1-h_0) + \frac{\gamma\phi_0^2 k^2(1-5h_0)}{2} \right\},$$

$$\frac{48f_0 h_0^2}{t_1^2} = -\frac{6}{k^2(1+h_0)} \left(h_0 - \frac{\gamma\phi_0^2 k^2}{2} \right). \quad (2.40)$$

Даже при $\gamma = -1$ решения описывают нефантомную космологию соответствующую квинтэссенции или материи. Например, если рассмотреть случай при $h_0 = -\frac{80}{3} < -1$, $\omega_{eff} = -1.025$. При некоторых упрощениях можно получить приемлемые значения эффективного параметра ω в области близкой к -1. Эти значения согласуются с наблюдательными данными для эффективного параметра ω . Затем из (2.40) получены

$$V_0 t_1^2 = -\frac{1}{k^2} \left(\frac{531200}{231} + \frac{403}{154} \gamma \phi_0 k^2 \right), \quad \frac{f_0}{t_1^2} = -\frac{1}{k^2} \left(\frac{9}{49280} + \frac{27}{7884800} \gamma \phi_0 k^2 \right). \quad (2.41)$$

Поэтому даже начиная с канонической скалярной теории с положительным потенциалом возможно получить решение, которое воспроизводит наблюдательное значение ω .

Можно рассмотреть другой случай [89], когда постоянные ϕ и H : $\phi = \phi_0$, $H = H_0$ и это соответствует пространству де Ситтера. Решение этих уравнений действия представлено в следующем виде:

$$H_0^2 = -\frac{e^{-\frac{2\varphi_0}{\varphi_0}}}{8f_0k^2}. \quad (2.42)$$

Поэтому для получения решения необходимо выполнение условия $f_0 < 0$, а φ_0 может быть произвольное. Постоянная Хаббла $H = H_0$ может быть определена начальным условием.

Стабильность полученных выше решений показана в работе [89] и выявлен интересный случай, который соответствует фантомной космологии с $h_0 < 0$, которая всегда стабильна, а также случай соответствующий нефантомной космологии с $h_0 > 0$ и которая всегда нестабильна. Изучение эволюции вселенной темной энергии с учетом поправок более высокого порядка к действию Эйнштейна – Гильберта отражено в работе [96]. Здесь наличие космологической константы дает стабильные фиксированные точки деситтера в гетеротических и бозонных струнах, а стабильных решений деситтера при наличии фантомной жидкости не существует. В этих исследованиях показано, что вселенная может иметь сингулярность Большого кризиса с конечным временем для струны II типа, тогда как сингулярность Большого разрыва имеется для гетеротических и бозонных струн. Таким образом, мы видим что существование и поведение темной энергии зависит от типа рассматриваемой теории струн.

2.4 Модифицированная гравитация: Нелинейная связь, космическое ускорение и проблема иерархии

В этом разделе исследуется роль неминимального взаимодействия (non-minimal coupling) модифицированной теории гравитации с темной энергией по отношению к эпохе космического ускорения [54]. Эти исследования были проведены в работах [99-101]. В этих работах представлено следующее действие

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{k^2} R + \left(\frac{R}{\mu^2} \right)^\alpha L_d \right\}, \quad (2.43)$$

где L_d - материя (темная энергия). Выбор параметра μ может исключить нежелательные неустойчивости, которые часто встречаются в теориях высших производных. Второе слагаемое в выражении действия описывает нелинейное взаимодействие материи с гравитацией. По аналогии, такое слагаемое может быть вызвано квантовыми эффектами как нелокальное эффективное действие. Следовательно, естественно считать, что он относится к сектору материи.

Варируя по $g_{\mu\nu}$ можно получить уравнения движения

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} \right\} + \tilde{T}^{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

Здесь тензор $\tilde{T}_{\mu\nu}$ играет роль эффективного тензора энергии-импульса и определяется следующим образом

$$\tilde{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\mu^2\alpha} \{-\alpha R^{\alpha-1} R^{\mu\nu} L_d + \alpha(\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \nabla^2)(R^{\alpha-1} L_d) + R^\alpha T^{\mu\nu}\}, \quad (2.45)$$

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \left(\int d^4x \sqrt{-g} L_d \right)$$

Возьмем в качестве материи безмассовое скалярное поле

$$L_d = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (2.46)$$

Уравнение, полученное варьированием по ϕ примет следующую форму

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(R^\alpha \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right). \quad (2.47)$$

Эта метрика соответствует вселенной Фрийдмана – Робертсона - Уолкера с плоскостью в 3 – х мерном пространстве. Если мы принимаем ϕ зависящим только от t ($\phi = \phi(t)$), решение уравнения (2.47) скалярного поля дается в виде

$$\dot{\phi} = qa^{-3} R^{-\alpha}, \quad (2.48)$$

где q постоянная интегрирования. Следовательно, $R^\alpha L_d = \frac{q^2}{2\alpha^6 R^\alpha}$, которое становится доминантным когда R мало по сравнению со слагаемым Эйнштейна $\frac{1}{k^2} R$ если $\alpha > -1$ и R большое при $\alpha < -1$. Таким образом, приходим к замечательной возможности о том, что темная энергия растет с уменьшением кривизны [99, 100]. В настоящей вселенной это решает проблему совпадения (равенство плотности энергии для темной энергии и темной материи), в силу того, что вселенная расширяется.

При подстановке (2.48) в (2.44) $(\mu, \nu) \equiv (t, t)$ компонент уравнения движения примет следующую форму:

$$0 = -\frac{3}{k^2} H^2 + \frac{36q^2}{\mu^2 \alpha a^6 (6\dot{H} + 12H^2)^{\alpha+2}} \left\{ \frac{\alpha(\alpha+1)}{4} H \ddot{H} + \frac{\alpha+1}{4} \dot{H}^2 + \left(1 + \frac{13}{4} \alpha + \alpha^2 \right) \dot{H} H^2 + \left(1 + \frac{7}{2} \alpha \right) H^4 \right\}. \quad (2.49)$$

Ускоренное решение Фрийдмана-Робертсона-Уолкера (2.49) полученное в [99- 100] можно представить в следующем виде:

$$\alpha = \alpha_0 t^{\frac{\alpha+1}{3}} \left(H = \frac{\alpha+1}{3t} \right), \quad \alpha_0^6 \equiv \frac{k^2 q^2 (2\alpha-1)(\alpha-1)}{\mu^2 \alpha^3 (\alpha+1)^{\alpha+1} \left(\frac{2}{3}(2\alpha-1) \right)^{\alpha+2}}. \quad (2.50)$$

Как показывает уравнение (2.50) вселенная ускоряется т.е. $\ddot{a} > 0$ если $\alpha > 2$. Если $\alpha < -1$, то решение (2.50) описывает сжатие вселенной при $t > 0$. При $t \rightarrow t - t_s$ (t_s – постоянная), ускорение и расширение вселенной происходят когда $t < t_s$. В решении с $\alpha < -1$ появляется сингулярность Большого разрыва при $t = t_s$. Для материи с отношением $p = \omega\rho$, где p плотность энергии, из обычного уравнения Фридмана-Робертсона-Уолкера получаем $a \propto t^{\frac{2}{3(\omega+1)}}$. Для $a \propto t^{h_0}$ следует $\omega = -1 + \frac{2}{3h_0}$, и ускоряющееся расширение ($h_0 > 1$) вселенной появляется при $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$. Для случая (2.50) было найдено следующее решение:

$$\omega = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}. \quad (2.51)$$

В случае если $\alpha < -1$, то $\omega < -1$ и является эффективным фантомным полем. Для обычной материи с отношением $p = \omega\rho$ с постоянной ω , энергия E и плотность энергии ρ ведут себя как $E \sim a^{-3\omega}$ и $\rho \sim a^{-3(\omega+1)}$. Исходя из вышесказанного, мы видим, что для стандартного фантомного поля с $\omega < -1$ плотность становится больше со временем и может породить Большой разрыв. Следовательно, это показывает что нелинейное взаимодействие гравитации с материей может произвести ускоренное расширение вселенной с эффективным параметром $E_0 S$ близким (выше, равного или ниже) к -1 . Более сложные взаимодействия можно рассмотреть в такой же форме в работах [99, 100].

2.4.1 Проблема космологической постоянной в гравитации

Для динамического решения проблемы космологической константы предложено большое количество моделей в литературе [54]. Одним из возможных решений проблемы космологической константы являются работы Mukohyama и Рандалла [102, 103]. В работе [102] действие представлено в следующем виде:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2k^2} + \alpha_0 R^2 + \frac{(k^4 \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi)^q}{2q k^4 f(R)^{2q-1}} - V(\varphi) \right], \quad (2.52)$$

где $f(R)$ надлежащая функция. Когда кривизна мала, то принято что $f(R)$ ведет себя как

$$f(R) \sim (k^2 R^2)^m. \quad (2.53)$$

Здесь m положительное. В случае, когда кривизна мала, энергия вакуума и значение потенциала становятся малыми. Тогда можно предположить, что для малой кривизны $V(\varphi)$ ведет себя как

$$V(\varphi) \sim V_0(\varphi - \varphi_c), \quad (2.54)$$

где V_0 и φ_c константы. Если $q > 1/2$ коэффициент перед кинетическим слагаемым $\dot{\varphi}$ в (2.52) становится больше. Это означает, что развитие скалярного поля φ во времени будет очень медленным и ожидается что φ не достигнет φ_c . Используя эту модель можно попытаться объяснить ускорение настоящей вселенной. Наверное модель (2.52) будет стабильной с учетом радиационных корректировок. Если кривизна мала и можно пренебречь временем развития кривизны, то можно изменить масштаб скалярного поля φ как $\varphi \rightarrow R^{m(2q-1)/q} \varphi$ и тогда кривизна в кинетическом слагаемом может быть исключена путем в переопределения φ , при этом появятся факторы, включающие $R^{m(2q-1)/q}$. Поэтому если $m(2q-1)/q > 0$, то взаимодействия могут быть ослаблены, когда кривизна мала и не появится радиационная корректировка к энергии вакуума, за исключением однопетлевых корректировок.

Существует точно разрешимая модель [104], которая может реализоваться по вышеуказанному сценарию. Для этого можно выбрать следующее выражение:

$$f(R) = \beta R^2, \quad V(\varphi) = V_0(\varphi - \varphi_c). \quad (2.55)$$

где β – постоянная. Слагаемым R^2 можно пренебречь подставляя $\alpha_0 = 0$ в (2.52) поскольку кривизна мала. При решении $\dot{\phi} = qa^{-3}R^{-\alpha}$ и выбирая $\varphi = \varphi_c + \varphi_0/t^2$ или $\varphi = \varphi_c + \varphi_0/(t_s - t)^2$ получены следующие ограничения [104]:

$$\varphi_0^2 = \frac{54\beta(-1+2h_0)^3 h_0^4}{k^2(12h_0^2-2h_0-1)}, \quad V_0 = \pm \frac{3h_0+1}{\sqrt{6k^2(12h_0^2-2h_0-1)(-1+2h_0)}}. \quad (2.56)$$

В случае когда φ_0^2 должен быть положительным:

$$\begin{aligned} \text{при } \beta > 0, \quad \frac{1-\sqrt{13}}{12} < h_0 < \frac{1+\sqrt{13}}{12} \text{ или } h_0 \geq \frac{1}{2}, \\ \text{при } \beta < 0, \quad h_0 < \frac{1-\sqrt{13}}{12} \text{ или } \frac{1+\sqrt{13}}{12} < h_0 \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Например, если $h_0 = -1/60$, который дает $\omega_{eff} = -1.025$ можно получить

$$kV_0 = \pm \frac{19}{34} \sqrt{\frac{15}{31}} = \pm 0.388722 \dots \quad (2.58)$$

Заметим, что значение ω_{eff} соответствует наблюдаемым пределам [40].

В случае когда $h_0 > 0$, $R = 6\dot{H} + 12H^2$ кривизна R уменьшается как t^{-2} со временем t и приближается к φ_c , но не достигает φ_c в конечное время, как ожидалось в [102].

Поскольку H ведет себя как h_0/t или $h_0/(t_s - t)$ при

$$a = \begin{cases} a_0 t^{h_0}, & \text{когда } h_0 > 0 \text{ (квинтэссенция)} \\ a_0 (t_s - t)^{h_0}, & \text{когда } h_0 < 0 \text{ (фантом)} \end{cases} .$$

Если подставить значение возраста настоящей вселенной 10^{10} лет $\sim (10^{-33} eV)^{-1}$ в t или $t_s - t$, наблюдаемое значение H может быть воспроизведено, которое может объяснить малость эффективной космологической постоянной $\Lambda \sim H^2$. Следует отметить, что даже при отсутствии потенциального слагаемого, то есть при $V_0 = 0$, когда $\beta < 0$ имеется решение:

$$h_0 = -\frac{1}{3} < \frac{1-\sqrt{13}}{12} = -0.2171\dots, \quad (2.59)$$

которое дает параметр $E_0 S$: $\omega = -3$, хотя ω является нереалистичным. Выбирая разные значения потенциала и нелинейные взаимодействия, возможно получить более реалистичные предсказания.

2.4.2 Проблема иерархии в модифицированной теории гравитации

Гравитация в моделях «мир на бране» может становиться очень сильной на энергетических масштабах порядка нескольких ТэВ, что делает возможной ее проверку в экспериментах в ближайшем будущем. Причины такого эффекта можно объяснить следующим образом в приближенном виде. Гравитационное взаимодействие в классической физике считается самым слабым и, соответственно, масштаб энергий, на котором оно становится значимым, в физике элементарных частиц оказывается огромным – так называемый планковский масштаб объединения взаимодействий $M_{Pl} \approx 10^{19}$ ГэВ. Главный вопрос: почему планковский масштаб так сильно отличается от масштаба электрослабого объединения порядка 10^2 ГэВ? Этот вопрос и есть знаменитая проблема иерархии масштабов [54].

Общеизвестно, что проблема иерархии элементарных частиц имеет фундаментальное значение в физике высоких энергий. Будет весьма интересно и значимо, если появится возможность решить проблему иерархий в рамках модифицированных теорий гравитации. Например в работе [105] проблема иерархии была изучена в рамках скалярно-тензорной теории. Для генерации иерархии рассматривалась шкала, представляющая собой скорость распада

вакуума Γ_{vac} . Как небольшую массовую шкалу вместо Γ_{vac} можно использовать возраст вселенной $\sim 10^{-33}$ эВ.

В данном случае необходимо начать с действия для модифицированной гравитации взаимодействующей с материей:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + L_{matter}]. \quad (2.60)$$

Допустим, что материя плотности Лагранжиана L_{matter} содержит скалярное поле φ подобное полю Хиггса

$$L_{matter} = -\frac{1}{2} \nabla^\mu \varphi \nabla_\mu \varphi + \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 - \lambda \varphi^4 + \dots \quad (2.61)$$

После конформных преобразований $g_{\mu\nu} \rightarrow e^\sigma g_{\mu\nu}$, материя плотности Лагранжиана L_{matter} преобразуется в следующий вид:

$$L_{matter} \rightarrow L_{matter}^\sigma = -\frac{e^\sigma}{2} \nabla^\mu \varphi \nabla_\mu \varphi + \frac{\mu^2 e^{2\sigma}}{2} \varphi^2 - \lambda e^{2\sigma} \varphi^4 + \dots \quad (2.62)$$

Изменяя φ как $\varphi \rightarrow e^{-\sigma/2} \varphi$, L_{matter}^σ приобретает другую форму:

$$L_{matter}^\sigma \sim -\frac{1}{2} \nabla^\mu \varphi \nabla_\mu \varphi + \frac{\mu^2 e^\sigma}{2} \varphi^2 - \lambda \varphi^4 + \dots, \quad (2.63)$$

здесь можно пренебречь производной по времени σ . Как видим массовый параметр μ , который определяется слабым масштабом, эффективно преобразуется как $\mu \rightarrow \tilde{\mu} \equiv e^{\sigma/2} \mu$. Обобщая, μ может иметь Планковский масштаб объединения взаимодействий $M_{Pl} \approx 10^{19}$ ГэВ. Если $e^{\sigma/2} \sim 10^{-17}$ в настоящей вселенной, $\tilde{\mu}$ может быть порядка 10^2 ГэВ, который является масштабом слабых взаимодействий. Таким образом, появилась некая вероятность того, что проблема иерархии может быть решена с помощью вышеуказанного варианта модифицированной гравитации. Подобное решение проблемы иерархий может быть найдено в двух скалярно-тензорных гравитациях [106, 107].

Рассмотрим следующую модель:

$$f(R) = R + f_0 R^\alpha, \quad (2.64)$$

где f_0 и α постоянные. Когда кривизна мала, при $\alpha < 1$ второе слагаемое доминирует. Предполагая, что параметр $E_0 S$, ω материи является постоянным, получают ускоренное космологическое решение Фридмана – Робертсона – Уолкера с эффективным параметром $E_0 S \omega_{eff}$ (2.66).

Если пренебречь первым слагаемым в (2.64), то мы получаем выражение:

$$e^{\sigma/2} \sim \frac{1}{\sqrt{f_0 \alpha R^{\alpha-1}}}. \quad (2.65)$$

В настоящей вселенной $R \sim (10^{-33} \text{eV})^2$. Предполагая, что f_0 может иметь Планковский масштаб $M_{Pl} \approx 10^{19} \text{ГэВ} = 10^{28} \text{эВ}$, получаем $f_0 \sim (10^{28} \text{эВ})^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}$. Затем уравнение (2.65) приводит к

$$e^{\sigma/2} \sim 10^{61(\alpha-1)}. \quad (2.66)$$

Если также предположить, что $-17 = 61(\alpha - 1)$, тогда $\alpha = 44/61$. В другом случае, когда $\omega > -1$, $\omega_{eff} > -1$ и вселенная не в фантомной фазе, уравнение (2.66) показывает, что модифицированная гравитация может решить проблему иерархии.

Действие скалярно - тензорной теории представлено в следующем виде:

$$S = \frac{1}{k^2} \int d^4x \sqrt{-g} e^{\alpha\phi} \left(R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_0 e^{-2\phi/\phi_0} \right) + \int d^4x \sqrt{-g} L_{matter},$$

$$L_{matter} = -\frac{1}{2} e^{\alpha\phi/2} + \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 - \lambda \varphi^4 + \dots. \quad (2.67)$$

Это действие может расценено как действие в системе Джордана. Скалярное поле φ может быть идентифицировано полем Хиггса в слабом электромагнитном взаимодействии. Теперь отношение вселенной эффективного гравитационного взаимодействия $\bar{k} = k e^{-\alpha\phi/2}$ и масса Хиггса μ дается в виде:

$$\frac{1}{\bar{k}} = \frac{e^{\alpha\phi/2}}{k\mu}. \quad (2.68)$$

Следовательно, даже если $1/k$ и μ существуют в слабом электромагнитном взаимодействии, при $e^{\alpha\phi/2} \sim 10^{17}$, $1/\bar{k}$ могут иметь планковский масштаб.

Путем повторного масштабирования метрики и скаляра Хиггса φ в виде:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-\alpha\phi} g_{\mu\nu}, \quad \varphi \rightarrow e^{\alpha\phi/2} \varphi, \quad (2.69)$$

было получено действие в рамках теории Эйнштейна:

$$S = \frac{1}{k^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2} (1 + 3\alpha^2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_0 e^{-2\phi(1/\phi_0 + \alpha)} \right) + \int d^4x \sqrt{-g} L_{matter},$$

$$L_{matter} = -\frac{1}{2} \left(\partial^\mu \varphi + \frac{\alpha}{2} \partial^\mu \phi \varphi \right) \left(\partial_\mu \varphi + \frac{\alpha}{2} \partial_\mu \phi \varphi \right) + \frac{\mu^2 e^{-\alpha\phi}}{2} \varphi^2 - \lambda \varphi^4 + \dots \quad (2.70)$$

В уравнении Эйнштейна, гравитационное взаимодействие k – постоянное, но эффективная масса Хиггса μ определяется через $\tilde{\mu} \equiv e^{-\alpha\phi/2}$ и зависит от времени. Следовательно, отношение $1/k$ и $\tilde{\mu}$ выражаются в следующем виде:

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} = \frac{e^{-\alpha\phi/2}}{k\mu}, \quad (2.71)$$

который идентичен отношению (2.68). Следовательно, даже если $1/k$ и μ имеют порядок Планковского масштаба, а также $e^{\alpha\phi/2} \sim 10^{17}$, то μ может иметь порядок в масштабе слабого взаимодействия. Таким образом, решение проблемы иерархии не зависит существенно от выбора системы отсчета. Тем не менее, необходимо отметить, что изменения космологического времени в двух системах могут быть различными из-за преобразования масштаба (2.69) как $dt \rightarrow d\bar{t} = e^{-\alpha\phi/2} dt$. Таким образом, интервал времени различен в 2 системах. Единицы времени и длины сейчас определяются электромагнетизмом. Также система где электромагнитные поля не взаимодействуют со скалярным полем ϕ может быть более предпочтительной. С тех пор когда электромагнитное взаимодействие становится частью электрослабого взаимодействия, система Джордана в (2.67) становится предпочтительнее с точки зрения решения проблемы иерархии.

Из вышесказанного можно выделить определенный класс модифицированных теорий гравитаций, которые расширяют общую теорию относительности, сохраняя ее положительные черты. Например, гравитационное действие Эйнштейна - Гильберта модифицируется, путем добавления произвольной функции от скалярной кривизны Риччи $R - f(R)$. Можно рассматривать комбинированный подход, предполагая наличие скалярного поля, а также использовать более сложные конструкции, полученные из тензоров Риччи, Римана и Вейля, или теории с неминимальным взаимодействием. Можно остановиться на теории гравитации в пространствах с размерностью выше четырех и т.д.

$f(R)$ – гравитация привлекает наибольшее внимание в силу того, что она выглядит проще других модифицированных теорий гравитаций, а также может быть переписана в виде скалярно-тензорной теории.

3 МНОГОМЕРНАЯ ГРАВИТАЦИЯ

3.1 Многомерное пространство-время

В настоящее время, современная космология и квантовая теория микромира пересекаются на фундаментальном теоретическом уровне и на уровне экспериментальных наблюдений. Попытки включения современной космологии в фундаментальную физическую теорию высоких энергий приводят к идее многомерного пространства-времени [8].

Идея многомерности приобрела реалистические очертания реального мира лишь в XX веке, так как долгое время представлялась мистической. Первая идея о многомерности пространства-времени, появилась в работе Г. Нордстрема [108] в 1914 году, в виде общей теории относительности в форме скалярной теории гравитации как составной части максвелловской электродинамики в пятимерном пространстве-времени. Дальнейшее развитие предложенная идея получила в трудах Т. Калуцы и О. Клейна [3, 4], заложивших основы одноименного подхода Калуцы – Клейна. Этот подход широко применялся для анализа многомерных супергравитационных теорий и их феноменологии. Вначале была предложена гипотеза о минимальном увеличении размерности – до пяти измерений – и с идеи о проявлении дополнительной размерности в виде электромагнитного взаимодействия. С помощью этого подхода можно было качественно объяснить тот факт, что дополнительные измерения, при условии их компактификации на некотором масштабе, являются ненаблюдаемыми в области малых энергий, лежащих ниже этого масштаба.

Идея многомерности фундаментального пространства-времени стала значимой только в рамках теории суперструн, которая является наиболее перспективной теорией высоких энергий, объединяющей квантовую гравитацию и теорию калибровочных полей. Так как теория суперструн и ее низкоэнергетические проявления могут быть сформулированы только в определенных размерностях пространства-времени $D = 10$ или $D = 11$, это и есть то основание для таких решений. Четырехмерность нашего мира достигается путем компактификации дополнительных измерений в энергетическом масштабе, недостижимом в рамках субпланковской физики.

Проблема иерархии в физике высоких энергий и космологии является следующей мотивацией к введению дополнительных измерений. Эта проблема отражает существование довольно большой энергетической «пустыни» между масштабом электрослабого взаимодействия порядка 1 ТэВ и планковским масштабом квантовой гравитации 10¹⁹ ГэВ. Проблема иерархии приобретает острый характер в космологическом контексте, так как она показывает огромный разрыв (в ≈ 120 порядков величины) между планковским масштабом и масштабом величины наблюдаемой космологической постоянной.

Дополнительные измерения пространства - времени могут быть макроскопическими и даже некомпактными – эти факторы являются основным

отличием несмотря на четырехмерную природу непосредственно наблюдаемого физического мира. Здесь надо отметить, что четырехмерность нашего мира достигается посредством локализации материи в многомерном пространстве-времени на его четырехмерных подмногообразиях называемой “мир на бране”.

Существуют многомерные теории с гравитационным действием, содержащим нелинейные по кривизне члены. Их появление является прямым следствием квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени [109, 110]. Благодаря произвольности выбора исходных параметров эффективного действия и различным вариантам начальных данных согласно [111,112], многомерная гравитация с лагранжианами нелинейными по кривизне, приводит к множеству различных низкоэнергетических теорий. Метрика, топология дополнительных измерений, которые могут возникать в результате квантовых флуктуаций при высоких энергиях называются начальными данными. Используя различные параметры для эффективного лагранжиана можно увидеть появление многих вселенных с различающимися свойствами. В результате редукции к четырем наблюдаемым измерениям возникают эффективные скалярные поля со сложным видом потенциалов, свойства которых во многих случаях и определяют физические свойства той или иной вселенной. Предложенная теория близка к концепции хаотической инфляции, согласно которой появляется большое множество вселенных при флуктуациях скалярного поля. При усложненном виде потенциала ситуация напоминает концепцию ландшафта в теории струн: число различных вакуумов в теории гетеротических струн достигает 10^{1500} [113]; число наиболее реалистичных деситтеровских вакуумов также велико [114].

Использование приближения медленных изменений облегчает получение определенных результатов в многомерной нелинейной гравитации, которое предполагает малость всех производных и малость всех плотностей энергии по сравнению с планковскими масштабами [111,112]. Предположенные гипотезы и исследования позволяют работать при исследованиях инфляционных моделей в космологии, которые характеризуются масштабом энергии Большого объединения. С помощью этого метода можно рассматривать разные виды гравитационного действия в широком диапазоне значений содержащихся в них параметров.

В силу их малости в теории Калуцы-Клейна дополнительные измерения пространства остаются невидимыми. В последнее десятилетие исследователями широко обсуждается альтернативная концепция «мира на бране», которая рассматривает нашу Вселенную как выделенную трехмерную поверхность или «листочек» в многомерном пространстве, в котором дополнительные измерения имеют бесконечные размеры. Они остаются невидимыми в силу того, что поля Стандартной модели предполагаются сосредоточенными на бране, а гравитация распространяется в окружающем объеме. Последние модели были актуальны с начала восьмидесятых годов в работах Рубакова и Шапошникова [2], Акамы [115], и др.

Повторный интерес к вышесказанным моделям связан с достижениями теории струн и М-теории. Позднее в исследованиях на моделях мира на бране успешное продвижение в нерешенных фундаментальных проблемах физики частиц и космологии дало новые идеи. Модель голографической вселенной в AdS/CFT - соответствии представлен на рисунке 3.1.

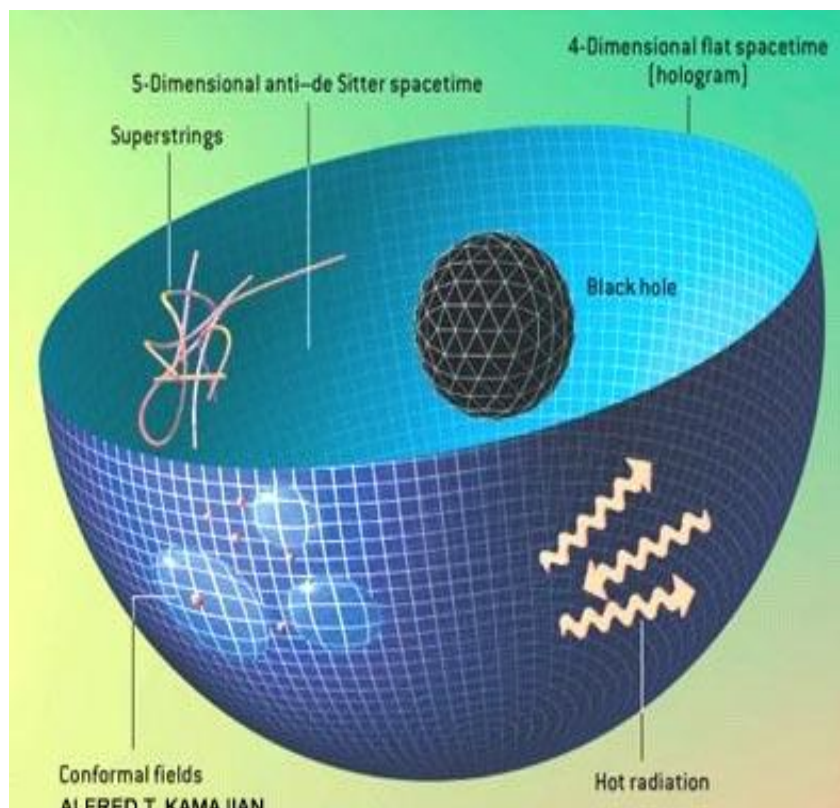


Рисунок 3.1 - Модель голографической вселенной в AdS/CFT- соответствии.

Динамика геометрии бран и локализованной на них материи представляет собой космологию бран, приходящую на смену обычной космологии четырехмерного мира. Оказывается, что в рамках такой концепции дополнительные измерения открывают новые перспективы решения проблемы иерархии - изменить границы энергетической "пустыни" между электрослабым взаимодействием и планковской гравитационной физикой, установить более глубокую связь с теорией струн в лице так называемого принципа AdS/CFT - соответствия, построить новые механизмы инфляции в ранней Вселенной и, наконец, предложить модели решения проблемы космологической постоянной, включающей как иерархию, так и космологическое ускорение.

3.1.1 Подход Калуцы-Клейна

Попытки объединения четырех физических взаимодействий стала необходимой составляющей в последние десятилетия. Идея дополнительных

измерений впервые была предложена Т.Калуцей и О.Клейном. Теодор Калуца и Оскар Клейн предложили гипотезу, что наш мир представляет собой искривленное 5-мерное пространство-время, сделав следующий шаг после открытия ОТО в построении геометрофизики [8].

Рассмотрим пятимерное пространство-время цилиндрического вида с компактифицированной на окружности длины $2\pi R$ пятой координатой y (рисунок 3.2), чтобы увидеть различие картины Калуцы-Клейна и концепции локализации материи на бране:

$$X^A = (x^\mu, y), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < 2\pi R, \quad (3.1)$$

где $A = 0,1,2,3,4,5$ и $\mu = 0,1,2,3$. Координаты x^μ образуют плоское четырехмерное пространство-время с лоренцевой метрикой. Тогда метрика $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ имеет вид

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (3.2)$$

Безмассовое скалярное поле в таком пространстве удовлетворяет уравнению с пятимерным даламбертианом $\square_5 = \eta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \partial_y^2$:

$$\square_5 \phi(x, y) = 0. \quad (3.3)$$

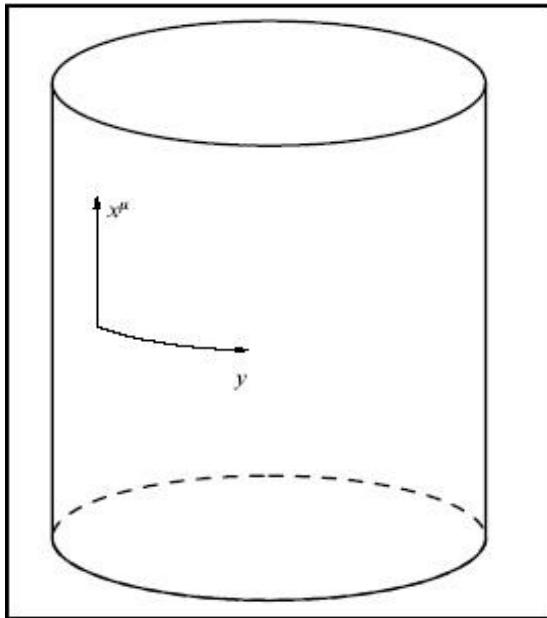


Рисунок 3.2 – Пятимерное пространство-время цилиндрического типа

Будучи разложено на окружности по периодическим дискретным гармоникам Фурье и по континууму плоских волн в x - пространстве:

$$\phi_p(x, y) = e^{(ip, x^\mu + \frac{iny}{R})}, \quad (3.4)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Это уравнение приводит в каждой n -й гармонике к массивному уравнению дисперсии для четырехмерного импульса p^μ :

$$p^2 + m_n^2 = 0, \quad (3.5)$$

где $p^2 = p_\mu p^\mu$ и $m_n^2 = n^2/R$.

С точки зрения пятимерного пространства-времени безмассовое поле представляет собой башню четырехмерных массивных мод Калуца-Клейна с $|n| \geq 1$, надстроенную над нулевой безмассовой модой $n = 0$ и имеющую дискретный спектр масс, определяемый масштабом компактификации дополнительного измерения R .

Первый массивный уровень спектра Калуцы - Клейна, не может быть возбужден и соответствующее компактное измерение ненаблюдаемо в масштабе энергий $E < 1/R$. Соответственно дополнительные измерения достаточно малого размера являются невидимыми для наблюдателя, ограниченного сверху по шкале энергий. Так как в предложенных супергравитационных многомерных теориях масштаб компактификации предполагался планковским порядка ($R \sim 1/M_p \sim 10^{-33}$ см), прямое наблюдение дополнительных измерений было возможным только при планковском масштабе энергии порядка ($M_p \sim 10^{19}$ ГэВ), что обеспечивало эффективную четырехмерность субпланковской физики. К сожалению, до настоящего времени на современных ускорителях, до сих пор не обнаружено ни одного массивного партнера Калуцы-Клейна, обычных частиц стандартной модели, размер дополнительного измерения которых должен удовлетворять ограничению $R^{-1} > 100$ ГэВ, или быть меньше, чем 10^{-17} см. Такие характеристики свойственны всем моделям типа модели Калуцы-Клейна.

В такой ситуации может всем казаться, что такие результаты закрывают какую либо возможность многомерного пространства-времени с макроскопическими дополнительными измерениями. Правда мы знаем, что существует кардинально другая концепция многомерия, основанная на локализации материи на четырехмерных подмногообразиях - бранах, погруженных в многомерный объем. Основное отличие этой концепции от подхода Калуцы-Клейна в существовании поля гравитации, которое свободно находится и распространяется в многомерном объеме, в то время как обычные поля материи локализованы на бранах и являются четырехмерными объектами. В этом случае возможно выполнение условий, при которых многомерное гравитационное поле может также локализоваться на бране и в низкоэнергетической области становится эффективно четырехмерным. Тогда ньютоновская гравитационная постоянная G_4 (или планковский масштаб

квантовой гравитации $M_p^2 = G_4^{-1}$) перестает быть фундаментальной величиной и начинает определяться комбинацией фундаментальной D – мерной гравитационной постоянной G_D и масштабом дополнительного измерения L .

Такое решение следует из низкоэнергетической теории суперструн, в которой браны возникают как связанные состояния (D_p – браны) открытых струн. Они представляют собой $(p + 1)$ -мерные времениподобные поверхности, на которых локализованы концы открытых струн. Если концы открытых струн несут на себе калибровочные поля, последние на фундаментальном уровне являются $(p + 1)$ -мерными объектами, живущими на бранах. Это объясняет тот факт, почему калибровочные поля не живут в объеме и не имеют КК-партнеров.

Замкнутые струны, которые описывают поле спина 2, могут свободно распространяться в объеме, а следовательно, разрешают свободное распространение 10-мерных гравитонов. Этим можно объяснить неравноправную роль гравитации и полей материи в новой картине дополнительных измерений. В этом случае только четырехмерный безмассовый гравитон имеет башню массивных КК-партнеров. Они остаются невидимыми в низкоэнергетических экспериментах не благодаря малому масштабу компактификации L , а благодаря тому, что локализация на бране подвергается только безмассовая нулевая мода, а волновые пакеты массивных КК-партнеров выталкиваются в объем за пределы браны и тем самым слабо взаимодействуют с четырехмерной материей. Следовательно, масштаб компактификации и энергетический масштаб, ниже которого теория является эффективно четырехмерной, могут быть сделаны независимыми.

Свойства локализации гравитона – это проявление так называемого принципа AdS/CFT - соответствия в полевой теории суперструн типа IIВ и существенно основаны на наличии кривизны многомерного объема. Носителем этих свойств является модель Рэндалла - Сундрума. Наиболее простым вариантом является ADD-модель с плоским фоновым пространством, которая позволяет сформулировать простые экспериментальные ограничения на параметры дополнительных измерений и предлагает пути решения проблемы иерархии, как в секторе полей материи, так и в гравитационном секторе.

3.1.2 Модель Калуцы-Клейна. Общий случай

Рассмотрим в чем заключается математическая красота и элегантность теории Калуцы-Клейна. Как было сказано выше, идея Калуцы заключалась в том, чтобы геометризовать гравитацию и электромагнетизм. Как мы знаем, метрика для гравитационного поля записывается следующим выражением:

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.6)$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \dots$, т. е. три пространственные координаты и одна временная.

Аналогичным образом Калуца объединил геометрию гравитации и электромагнетизма. Он положил:

$$dJ^2 = \mathcal{G}_{AB} dx^B dx^A, \quad (3.7)$$

где $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$.

Для того чтобы понять смысл метода Калуцы, начнем с римановой теории в пяти измерениях. В этом случае метрический тензор будет представлять собой подобие шахматной доски с полем 5×5 .

В качестве аналога метрического тензора $g_{\mu\nu}$ будет \mathcal{G}_{AB} , который задается следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}_{00} & \mathcal{G}_{01} & \mathcal{G}_{02} & \mathcal{G}_{03} & \mathcal{G}_{05} \\ \mathcal{G}_{10} & \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \mathcal{G}_{13} & \mathcal{G}_{15} \\ \mathcal{G}_{20} & \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} & \mathcal{G}_{23} & \mathcal{G}_{25} \\ \mathcal{G}_{30} & \mathcal{G}_{31} & \mathcal{G}_{32} & \mathcal{G}_{33} & \mathcal{G}_{35} \\ \mathcal{G}_{50} & \mathcal{G}_{51} & \mathcal{G}_{52} & \mathcal{G}_{53} & \mathcal{G}_{55} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}_{\mu\nu} & \mathcal{G}_{\mu 5} \\ \mathcal{G}_{5\nu} & \mathcal{G}_{55} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & \mathcal{A}_\mu \\ \mathcal{A}_\nu & \mathcal{G}_{55} \end{pmatrix}$$

Здесь индексы $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $\mathcal{G}_{\mu\nu} \sim g_{\mu\nu}$, $\mathcal{G}_{5\nu} \sim \mathcal{A}_\nu$, $\mathcal{G}_{55} \sim -\varphi^2$ где φ скалярное поле.

По определению компоненты поля Калуцы переименовали, чтобы часть стала элементами исходного поля Эйнштейна, часть — элементами поля Максвелла. Наглядно это можно представить в следующем виде (рисунок 3.3).

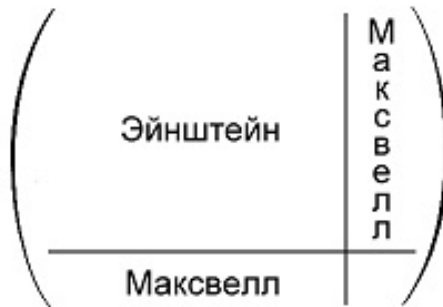


Рисунок 3.3 – Элементы поля Максвелла

Далее, с помощью \mathcal{G}_{AB} удается модифицировать уравнение Эйнштейна:

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{AB}, \quad (3.8)$$

где $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$ и

$$T_A^B = - \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) R_A^B - \frac{1}{2} \delta_A^B f + (\delta_A^B g^{LM} - \delta_A^L g^{BM}) \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right)_{;L;M} \right\}, \quad (3.9)$$

определяет эффективный геометрический источник материи с нетривиальной зависимостью от кривизны. Уравнение (3.8) имеет структуру, которая совпадает со стандартными уравнениями общей теории относительности, где источником гравитационного поля является эффективный тензор энергии – импульса (3.9). Просто дополнив полем Максвелла поле Эйнштейна, Калуца сумел собрать из них пятимерное поле. Идеи Калуцы стали именовать "чудесами Калуцы".

Математическая красота данной идеи также заключается в следующем:

1. 15 уравнений Эйнштейна распадаются на десять 4-мерных общих уравнений гравитации, четырех уравнений Максвелла и одно для скалярного поля;
2. В уравнениях автоматически появляются $T_{\mu\nu}$;
3. 4 уравнения из уравнений Эйнштейна совпадают с уравнениями геодезической линии, когда частица движется в гравитационном и магнитном поле если принять скорость как:

$$\frac{dx^5}{ds} = \frac{-2q}{\sqrt{G}m} \quad (3.10)$$

тогда импульс

$$P^5 = m \frac{dx^5}{ds} = -2\sqrt{G}q. \quad (3.11)$$

После Калуцы, к идее о 5-мерии пространства пришел русский физик-теоретик Г.А. Мандель. Согласно Манделю мир представляет собой 5-мерное пространство в которое вложена 4-мерная риманова поверхность. Однако следует отметить немало важную роль в становлении данной теории Г. Нордстрема в 1914 году. Возможно именно благодаря ему идея о многомерности пространства получила столь большую популярность. Также 5-мерием были заинтересованы де Бройль, А. Эйнштейн, Ж. Даламбер, Б. Риман и другие физики.

Идея о размерности пространства свыше пяти была взята по аналогии с идеей Калуцы, где дополнительная координата позволяла ввести новое векторное поле. Тогда многомерный метрический тензор \mathcal{G}_{MN} , задается следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}_{\alpha\beta} & \mathcal{G}_{\alpha 5} & \mathcal{G}_{\alpha 6} & \dots \\ \mathcal{G}_{5\beta} & \mathcal{G}_{55} & \mathcal{G}_{56} & \dots \\ \mathcal{G}_{6\beta} & \mathcal{G}_{65} & \mathcal{G}_{66} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & \lambda_{\alpha} & \sigma_{\alpha} & \dots \\ \lambda_{\beta} & \mathcal{G}_{55} & \mathcal{G}_{56} & \dots \\ \sigma_{\beta} & \mathcal{G}_{65} & \mathcal{G}_{66} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

где смешанные компоненты соответствуют векторным потенциалам соответствующих взаимодействий.

Основоположником шестимерия является Роберто Бартини - итальянский физик, автор более 60 законченных проектов самолётов. Бартини разработал теорию шестимерного мира, которая позднее получила название «мир Бартини» [161]. В ней, помимо привычных нам декартовых координат трехмерного пространства, Бартини предложил рассматривать такую же трехмерную модель времени с тремя ортогональными осями координат. Схематически эта модель представлена на рисунке 3.4.

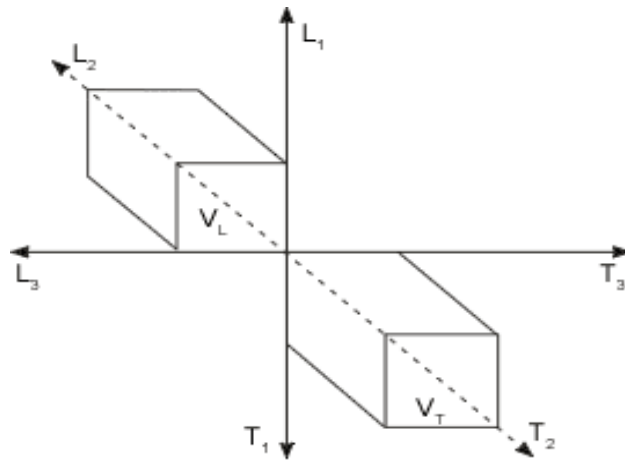


Рисунок 3.4 - Модель шестимерного мира

Согласно Бартини не только пространство трехмерно, но и время ничуть не уступает по размерности. Для описания временных измерений он вводит понятие «стрелы времени». Стрела времени - это человек, идущий по прямой в темноте с фонариком в руках. Первое временное измерение - это прямая. Таким образом, человек идет по прямой от прошлого к будущему. Оно ему не видно, пока на него не упадет свет фонарика. То пространство, которое лежит позади - прошлое. Пространство под светом фонарика - настоящее.

Второе временное измерение - это временная плоскость. Она состоит из

бесконечного числа временных прямых. Суть временной плоскости заключается в том, что в каждый момент времени мы можем совершить бесконечное число событий.

Третье временное измерение - это объем времени. Это бесконечное число параллельных временных плоскостей. Человек или любой объект в этом пространстве может совершить действие в каждый момент времени только в одной плоскости, где лежит бесконечное число выборов, а в остальных плоскостях лежат выборы, которые в данный конкретный момент времени человек или объект совершить не может. Получается человек (объект) колесит по временному трехмерному пространству, перемещаясь во всем трем осям времени. Таким образом, для этого человека нет будущего, так как он его еще не достиг, нет прошлого, так как оно только в его памяти, есть только настоящее - пространство под светом фонарика. Но, это не означает что будущего и прошлого вообще нет, просто в силу свойств своего восприятия (света фонарика) человек их не видит.

До сих пор мы говорили о математической красоте описания многомерного пространства. Как бы не была математически прекрасна данная теория она имеет ряд неточностей, утверждающих что размерность пространства-времени не может быть больше четырех:

- 1) неустойчивость тел в размерности $n \geq 5$ заключающееся в уменьшении сил притяжения между планетами в Солнечной системе в результате чего они могут упасть;
- 2) неустойчивость атомов из-за отсутствия уровней энергии, что означало бы невозможность существования планет и всего живого;
- 3) непонятен физический смысл G_{55} ? Является оно хиггсовским или безмассовым;
- 4) данная теория не затрагивала два других не менее важных видов взаимодействия: слабого и сильного;
- 5) не давала никаких новых экспериментальных предсказаний.

Для решения проблемы (4-ый пункт) включения слабого и сильного взаимодействий, пяти измерений Калуца не хватает, как не хватает шести, семи или десяти для объединения всех взаимодействий. Теория струн говорит, что их должно быть одиннадцать — десять пространственных и время. Пока не наблюдаются частицы, предсказанные суперсимметрией, да и свернуть Вселенную пока в экспериментах в 11 измерений не удастся. Именно по этим причинам теория струн да и теория о многомерии в целом является лишь удивительно красивой гипотезой. Не стоит недооценить актуальность данной темы ведь шаг в многомерное пространство — это шаг в новую более развитую эру человечества.

При увеличении числа измерений возникают большие возможности. На данный момент нет каких-либо данных, по которым необходимо останавливаться

только на одном дополнительном измерении. Например, для детального исследования можно рассмотреть риманово пространство с произвольным числом измерений, выделив физическое четырехмерное подпространство [120]:

$$\mathbb{M}_D = \mathbb{M}_4 \otimes \mathbb{M}_d \quad (3.12)$$

Для этого необходимо ввести базисные вектора: координатный базис e_A для разбиения $\mathbb{M}_4 \otimes \mathbb{M}_d$ и $e_{\bar{A}}$ - лоренцев базис того же пространства. Один базис можно разложить по другому

$$e_A = b_A^{\bar{A}} e_{\bar{A}} = b_A^{\bar{\mu}} e_{\bar{\mu}} + b_A^{\bar{a}} e_{\bar{a}} \quad (3.13)$$

Подразумевается суммирование. Индексы μ, ν относятся к пространству \mathbb{M}_4 , а, б – к пространству \mathbb{M}_d .

Разложение (3.13) может быть представлено в матричном виде с матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} b_{\mu}^{\bar{\mu}} & b_{\mu}^{\bar{a}} \\ b_{\bar{\mu}}^{\mu} & b_{\bar{a}}^{\mu} \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение $e_{\bar{\mu}} * e_{\bar{a}} = 0$ в лоренцевом базисе по определению. Следовательно, $b_{\bar{a}}^{\bar{\mu}} = 0$, а матрица

$$\begin{pmatrix} h_{\bar{\mu}}^{\mu} & b_{\bar{\mu}}^{\bar{a}} \\ b_{\bar{a}}^{\mu} & b_{\bar{a}}^{\bar{a}} \end{pmatrix}$$

представляет собой общий вид обратной матрицы.

Компоненты метрического тензора G в пространстве \mathbb{M}_4 можно выразить через коэффициенты разложения одного базиса в другом виде

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\equiv e_{\mu} e_{\nu} = b_{\mu}^{\bar{A}} b_{\nu}^{\bar{C}} e_{\bar{A}} e_{\bar{C}} = b_{\mu}^{\bar{\mu}} b_{\nu}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\mu}} e_{\bar{\nu}} + b_{\mu}^{\bar{a}} b_{\nu}^{\bar{c}} e_{\bar{a}} e_{\bar{c}} = \\ &= b_{\mu}^{\bar{\mu}} b_{\nu}^{\bar{\nu}} \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + b_{\mu}^{\bar{a}} b_{\nu}^{\bar{c}} \eta_{\bar{a}\bar{c}} = g_{\mu\nu} - b_{\mu}^{\bar{a}} b_{\nu}^{\bar{a}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Кроме того,

$$G_{\mu a} \equiv e_{\mu} e_a = b_{\mu}^{\bar{A}} b_a^{\bar{C}} e_{\bar{A}} e_{\bar{C}} = b_{\mu}^{\bar{a}} b_a^{\bar{c}} e_{\bar{a}} e_{\bar{c}} = b_{\mu}^{\bar{a}} b_a^{\bar{a}}$$

и

$$G_{ac} \equiv e_a e_c = b_a^{\bar{A}} b_c^{\bar{C}} e_{\bar{A}} e_{\bar{C}} = -b_a^{\bar{a}} b_c^{\bar{a}}. \quad (3.15)$$

В данном случае используется основное свойство лоренцева базиса $e_{\bar{A}} e_{\bar{C}} = \eta_{\bar{A}\bar{C}}$. Поле B_{μ} определяется следующим образом:

$$b_{\mu}^{\bar{a}} = b_a^{\bar{a}} B_{\mu}^a,$$

или в явном виде

$$B_\mu \equiv B_\mu^a \equiv h_{\bar{a}}^a b_\mu^{\bar{a}}. \quad (3.16)$$

$$G_{ac} \equiv \phi_{ac}$$

Последнее выражение является скаляром относительно преобразований в \mathbb{M}_4 . Подставив это выражение в (3.14), (3.15), (3.16) получим необходимые формулы для расщепления метрического тензора многомерного пространства

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \phi_{ac} B_\mu^a B_\nu^c, \quad (3.17)$$

$$G_{\mu a} = \phi_{ac} B_\mu^c. \quad (3.18)$$

Явный вид координатных преобразований аналогичное 5-мерному случаю

$$x' = x'(x), y' = y'(x, y), \quad (3.19)$$

приводит к следующим трансформациям:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}, \quad G'_{ac} = \frac{\partial y^d}{\partial y'^a} \frac{\partial y^f}{\partial y'^c} G_{df},$$

$$B_\mu'^a = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial y'^a}{\partial y^c} B_\nu^c + \frac{\partial y'^a}{\partial y^c} \frac{\partial y^c}{\partial x^\nu}. \quad (3.20)$$

Полученные выражения справедливы и без учета симметрии дополнительного пространства. В случае исследования 5-мерной модели, можно было бы не заботиться о форм - инвариантности метрики дополнительного пространства относительно преобразования:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu, \\ y' &= y + \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \ll 1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Вид метрики дополнительного пространства \mathbb{M}_1 не меняется при применении преобразовании (3.21), в силу простоты геометрии этого пространства. Если же дополнительное пространство является многомерным, то произвольные преобразования координат влияют на его метрику. Учитывая это свойство, можно утверждать, что в низкоэнергетическом пределе лагранжиан не будет иметь стандартного калибровочно-инвариантного вида, хотя недиагональные компоненты метрического тензора будут ассоциироваться с векторными калибровочными полями. Для получения калибровочно - инвариантной теории при низких энергиях, необходимо, чтобы дополнительное пространство обладало соответствующей симметрией. Следовательно, класс преобразований метрики

этого пространства, а именно метрику форм – инвариантной, которая порождает калибровочно - инвариантную теорию.

Из большого обзора работ по многомерной теории гравитации с произвольным числом измерений и различными видами нелинейных по кривизне лагранжианов, можно выделить определенный класс моделей мира на бране смешанного характера. Особенность этого класса такова, что часть ($D - d_0 = d_1$) дополнительных измерений компактна и ненаблюдаема за счет своих малых размеров (калуца-клейновский характер). Из оставшихся $d_0 = 5$ измерений одно имеет бесконечную протяженность и ненаблюдаемо за счет удержания материи в окрестности выделенной 4-поверхности т.е браны.

Отсутствие каких-либо негравитационных источников является значимой особенностью существующих моделей мира на бране. Для описания толстой браны как топологического дефекта т.е. доменной стенки трубуется скалярное поле ϕ , которое возникает как функция масштабного фактора КК – измерений. Исследования показывают, что исходный лагранжиан может содержать полином четвертой степени от многомерной скалярной кривизны, а также квадрат тензора Риччи и скаляр Кречмана. Соответственно, мы получаем два типа толстых бран: одни с убывающим, другие с растущим масштабным фактором в направлении от браны. В обоих случаях пространство-время вдали от браны асимптотически антидеситтеровское, эффективная толщина браны значительно меньше, чем радиус кривизны AdS – пространства.

3.2 ADD-модель: масштаб и число дополнительных измерений

В представленной модели Аркани-Хамеда-Димопулоса-Двали (ADD) [33] четырехмерная гравитационная постоянная представлена в следующем виде:

$$G_4 = \frac{1}{M_p^2}. \quad (3.22)$$

В данном случае гравитационная постоянная не является фундаментальной.

D-мерное гравитационное действие является фундаментальным:

$$S = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D X G^{1/2} R(G_{AB}), \quad D = 4 + N, \quad (3.23)$$

с D – мерной гравитационной постоянной, выражающейся через фундаментальный энергетический масштаб теории M , существенно отличный от планковского масштаба M_p :

$$G_D = \frac{1}{M^{D-2}}. \quad (3.24)$$

В данном случае предполагается, что D – мерное гравитационное поле

взаимодействует с четырехмерной материей, локализованной на бране коразмерности $N = D - 4$ и характерный размер дополнительных измерений конечен и равен L .

При ограничении низкоэнергетическим приближением, основной вклад в который происходит от нулевых мод гравитационного поля, в многомерном интеграле (3.23) интеграл по y факторизуется в виде объема внутреннего пространства:

$$\int d^D X \equiv \int d^N y = L^N \int d^4 x. \quad (3.25)$$

Эффективное действие гравитационного поля для нулевой моды, которой является четырехмерная метрика $g_{\mu\nu}(x)$, принимает вид:

$$S_{eff}[g_{\mu\nu}] = \frac{L^N M^{N-2}}{16\pi} \int d^4 x g^{1/2} R(g), \quad (3.26)$$

с гравитационной постоянной G_4 и планковской массой:

$$G_4 = \frac{G_D}{L^N}, \quad M_p = M(ML)^{N/2}. \quad (3.27)$$

Отсюда следует что, наблюдаемый планковский масштаб теории гравитации является производным от фундаментального $(D = 4 + N)$ -мерного масштаба и размера дополнительных измерений. Это свойство позволяет пересмотреть подход к проблеме иерархии и перенести фундаментальный гравитационный масштаб из планковской области в область более низких энергий. Согласно формуле (3.27) требуется большой размер внутреннего пространства. В рамках стандартной схемы Калуцы-Клейна было бы невозможно получить большой размер, так как потребовалось бы введение легких КК-партнеров частиц материи. В рамках идеи о локализации материи на бране КК-партнеры материи не существуют вообще, следовательно, отсутствуют экспериментальные ограничения.

Вследствие того, что только гравитоны могут распространяться в многомерном объеме, ограничения на размер дополнительных измерений следуют из гравитационного сектора. Такие ограничения известны из разных экспериментов подобных эксперименту по проверке ньютоновского закона притяжения пробных масс (эксперимент Кавендиша). Согласно этому закону, ограничения имеются в миллиметровом диапазоне и проверен в масштабах небесной механики. Закон притяжения хорошо проверен до расстояний 0,2 мм, но на меньших расстояниях отклонения от него в настоящее время экспериментально не исключены. Таким образом, в отличие от ограничений коллайдера в рамках КК-подхода $L < 10^{-17}$ см, имеется более умеренная оценка:

$$L < 0,2 \text{ мм.} \quad (3.28)$$

Эту оценку можно применить для установления ограничения на число дополнительных измерений. Из (3.27) следует, что масштаб компактификации L можно выразить через фундаментальный масштаб M и коразмерность браны N согласно

$$L = M^{-1} \left(\frac{M_p}{M} \right)^{2/N} \simeq 10^{32/N-17} \text{ см,} \quad (3.29)$$

где значение $M \sim 1\text{ТэВ}$. Следовательно, для трех низших коразмерностей браны справедливы следующие оценки на L :

$$\begin{aligned} N = 1, L &\sim 10^{15} \text{ см,} \\ N = 2, L &\sim 10^{-1} \text{ см,} \\ N = 3, L &\sim 10^{-6} \text{ см.} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Первый случай, полностью исключен данными по планетарной и небесной механике, второй случай находится как раз в миллиметровом диапазоне современных экспериментов [116]. Последний вариант, в ближайшее время практически недостижим. Таким образом, одно дополнительное измерение в ADD- модели пока исключен. Наиболее вероятной в ближайшее время возможна проверка этой модели с двумерным внутренним пространством.

3.3 Модель Рандалла – Сундрума

Пятимерное гравитационное поле с космологическим членом Λ_5 , взаимодействующее с четырехмерной браной:

$$\begin{aligned} S[G_{AB}(X), \psi(x)] = & \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5 X G^{1/2} [{}^5R(G_{AB}) - 2\Lambda_5] + \\ & + \int d^4 X g^{1/2} \left(\frac{1}{8\pi G_5} [K] - \sigma + L_m(g_{x\beta}, \psi, \partial\psi) \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

рассмотрена в модели Рандалл – Сундрума [6,7]. Используя эту модель можно показать, что ограничения могут быть бесконечными в присутствии ненулевой кривизны в объеме.

Исследуемый объект, т.е. брана населена четырехмерным материальным полем ψ с лагранжианом $L_m(g_{x\beta}, \psi, \partial\psi)$ и индуцированной метрикой $g_{\mu\nu}(x)$ и имеет натяжение σ . Это натяжение можно рассматривать как четырехмерный космологический член. Если считать, что брана является времениподобной плоскостью: $X^5 \equiv y = 0$ в координатной системе $X^A = (x^\mu, y)$ т.е. является

координатной калибровкой, т.к. преобразованием координат она всегда может быть помещена в эту точку пятой координаты. Тогда $g_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu}(x, 0)$ есть индуцированная метрика. В случае, когда пятимерное пространство обладает Z_2 -симметрией относительно плоскости браны, то есть пространство-время справа от браны (при $y > 0$), тогда решение может быть получено зеркальным отражением его полупространства при $y < 0$. Подобное свойство в нормальной гауссовой системе координат ($G_{5\mu}(X) = 0$) есть не что иное как четность функций остальных ненулевых метрических коэффициентов:

$$G_{\mu\nu}(x, y) = G_{\mu\nu}(x, -y), \quad G_{55}(x, y) = G_{\mu\nu}(x, -y) = 1. \quad (3.32)$$

Когда мы рассматриваем пятимерное пространство - брана представляет собой дельтаобразное распределение материи и натяжения и решение таких многомерных уравнений Эйнштейна не является гладким. Нормальные к бране производные метрических коэффициентов получают скачок на бране. Точнее это скачок следа внешней кривизны браны при подходе к ней справа и слева: $[K] = K(y = 0^+) - K(y = 0)$, он отличен от нуля и порождает дополнительный поверхностный член в действии. Этот член называется - действие Гиббонса-Хокинга [117]. Это действие необходимо вводить для корректности вариационной процедуры полного пятимерного действия.

Эта вариация действия приводит к уравнениям Эйнштейна в пятимерном объеме и условиям сшивания Израэля на бране [118], которые выражают скачок внешней кривизны браны $K_{\mu\nu}$:

$$[K^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}K] = 8\pi G_5 S^{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

через полный метрический тензор энергии-импульса четырехмерного бранного действия в (3.31), $S^{\mu\nu}$, включающий как вклад материи $T^{\mu\nu}$, так и натяжения,

$$\frac{1}{2} g^{1/2} S^{\mu\nu} = \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4 X g^{1/2} \left(-\sigma + L_m(g_{x\beta}, \psi, \partial\psi) \right). \quad (3.34)$$

$$S^{\mu\nu} = -\sigma g^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}. \quad (3.35)$$

Вследствие Z_2 - симметрии внешние кривизны справа и слева от браны просто различаются знаком и в нормальной гауссовой системе координат равны:

$$K_{\mu\nu} \Big|_{y=\pm 0} = -\frac{1}{2} \frac{dg_{\mu\nu}}{dy} \Big|_{y=\pm 0}. \quad (3.36)$$

Знаковая конвенция соответствует определению внешней кривизны как производной 4-метрики вдоль нормали к бране, направленной наружу из полупространства $y > 0$ и внутрь из полупространства $y < 0$.

В отсутствие материи на бране существует простое решение полной системы уравнений Эйнштейна и краевых условий сшивания в виде кусочно-гладкой метрики:

$$dx^2 = dy^2 + \exp\left(-\frac{2|y|}{l}\right) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.37)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ плоская метрика Минковского при условии тонкого согласования между отрицательной пятимерной космологической постоянной и положительным натяжением на бране:

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{l^2}, \quad \sigma = \frac{3}{4\pi G_5 l}. \quad (3.38)$$

Решение (3.37) представляет собой геометрию пространства анти-де Ситтера – однородного пространства постоянной отрицательной кривизны, которое является сшивкой двух Z_2 - симметричных областей AdS – пространства, простирающихся в координатах Пуанкаре (x^μ, y) между браной $y = 0$ и их соответствующими горизонтами $y = \pm x$.

В теории струн существует модель Хоравы-Виттена [119], которая предлагает решение проблемы киральных фермионов в полевом приближении путем компактификации многомерного пространства на орбифолде. В этой упрощенной модели пятая координата y компактифицируется на окружность конечной длины $2d$ и пробегает значения $-d \leq y \leq d$. Точки d и $-d$ отождествляются, так что точки $y = 0$ и $|y| = d$ параметризуют диаметрально противоположные точки на такой окружности. Далее отождествляются дополнительные точки y и $-y$ на двух полуокружностях, в результате чего получается орбифолд – многообразие, не обладающее гладкостью в двух фиксированных точках $y = 0$ и $y = d$. В этих точках помещаются две браны, которые можно населить киральной фермионной материей, индуцированной из многомерного объема (рисунок 3.5).

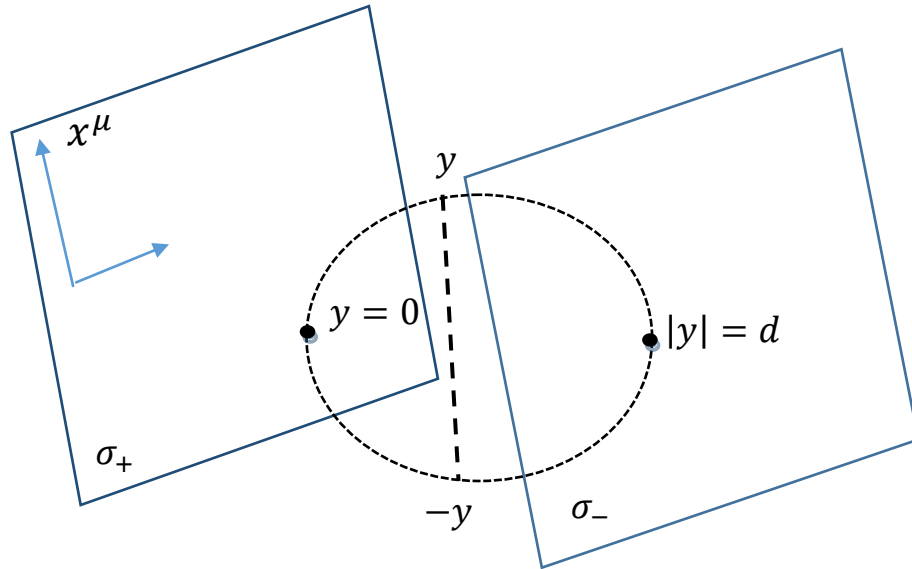


Рисунок 3.5 - Компактификация пятого измерения на орбиформе модели Хоравы – Виттена.

Кусочно - гладкая метрика (3.37) является самосогласованным решением пятимерных уравнений Эйнштейна и условий сшивания Израэля на орбиформе с двумя бранами при условии того, что их натяжения σ_{\pm} совпадают с точностью до знака и опять согласованы с отрицательной космологической постоянной в объеме:

$$\sigma_+ = -\sigma_- = \frac{3}{4\pi G_5 l}. \quad (3.39)$$

Выражение (3.31) - гравитационное действие этой системы, в котором присутствуют два бранных поверхностных интеграла с соответствующими натяжениями σ_{\pm} и скачками внешней кривизны. Частный случай однобранной модели Рэндалла - Сундрума получается формальным пределом $d \rightarrow \infty$.

Рассмотрим D - мерное дифференцируемое многообразие \mathbb{M}_D , которое разложимо в прямое произведение

$$\mathbb{M}_D = \mathbb{M}_4 \times \mathbb{M}_d. \quad (3.40)$$

Пространство дополнительных измерений \mathbb{M}_d предполагается компактным и имеющим объем $V_d < \infty$. Если ввести координаты многообразия $\mathbb{M}_D: \{X\} = (\{x\}, \{y\})$, где набор x^{μ} , $\mu = 1, 2, 3, 4$ описывает четырехмерное пространство \mathbb{M}_4 , а

набор y_a , $a = 1, 2, \dots, d$ – дополнительное пространство \mathbb{M}_d . Интервал записывается с помощью метрического тензора обычным образом:

$$ds^2 = G_{MN} dX^M dX^N, \quad (3.41)$$

где индексы M, N пробегает значения $1, 2, \dots, d+4$. Объем дополнительного пространства выражается через положительно – определенную внутреннюю метрику γ_{ab} :

$$V_d = V(\mathbb{M}_d) = \int d^d y \sqrt{\gamma} < \infty, \quad (3.42)$$

где $\gamma = \det(\gamma_{ab})$. Последнее неравенство – необходимое условие компактности этого подпространства.

Для демонстрации возможностей можно рассмотреть поведение скалярного поля Φ , определенного в полном пространстве \mathbb{M}_d , действие для которого имеет вид

$$S = \int_{\mathbb{M}_D} d^D X \sqrt{|G|} \left[\frac{1}{2} (\partial_M \Phi \partial^M \Phi) - U(\Phi) \right] \quad (3.43)$$

Варьируя действие по Φ при фиксированной метрике, приходим к уравнению движения

$$\square_D \Phi + dU/d\Phi = 0. \quad (3.44)$$

Здесь - мерный оператор Даламбера определяется следующим образом:

$$\square_D \Phi \equiv \nabla_M \nabla^M \Phi = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \partial_M (\sqrt{|G|} \partial^M \Phi) \quad (3.45)$$

где $G = \det(G_{MN})$. Если ограничиться малыми отклонениями от положения равновесия, то можно аппроксимировать потенциал квадратичным слагаемым $U(\Phi) \simeq M^2 \Phi^2 / 2$. Тогда уравнение движения упрощается, принимая вид

$$(\square_D + M^2)\Phi = (\square_4 + \square_D + M^2)\Phi = 0, \quad (3.46)$$

где \square_4 и \square_D – операторы Даламбера в соответствующих подпространствах.

Можно ввести ортонормированный набор функций $Y_n(y)$, таких, что

$$\square_D Y_n(y) = \lambda_n Y_n(y). \quad (3.47)$$

Собственные значения оператора Даламбера λ_n дискретны, так как \mathbb{M}_d – компактное пространство, Свойство ортонормированности записывается следующим образом:

$$\int_{\mathbb{M}_D} d^d y \sqrt{|\gamma|} Y_n(y)^* Y_m(y) = \delta_{nm} \quad (3.48)$$

Можно разложить Φ в ряд по собственным функциям $Y_n(y)$,

$$\Phi(X) = \sum_n Y_n(y) \Phi_n(x), \quad (3.49)$$

и учитывая выражения (3.67) и (3.68), нетрудно выписать уравнения поля Φ в пространстве \mathbb{M}_4 :

$$(\square_4 + \lambda_n + M^2) \Phi_n(x) = 0. \quad (3.50)$$

Поля $\Phi_n(x)$ воспринимаются наблюдателем как скалярные поля с массами $M_n = M^2 + \lambda_n$. Ненаблюдаемость скалярных частиц обычно объясняется их большой массой.

Идея о многомерности, т.е. то, что число измерений в нашем мире больше четырех возникла в начале прошлого века и на тот момент казалась очень простой. Эта идея оказалась глубокой т.к. для получения значимых результатов необходимо владеть математическим аппаратом для вычисления многочисленных и нетривиальных следствий [120]. Например, если взять лист бумаги, для нас он воспринимается как двумерный объект, но для микроскопических объектов он будет трехмерен. Благодаря малому размеру, оно способно ускользать от нашего восприятия.

4. МИР НА БРАНЕ

4.1 Топологические дефекты - доменные стенки

В последние десятилетия, в космологии и астрофизике, одним из важных направлений при исследовании Вселенной, является представление «мир на бране». Основная идея о «мире на бране» состоит в том, что наше пространство имеет более трех измерений, но известные нам частицы могут распространяться только вдоль трехмерной гиперповерхности, вложенной в это многомерное пространство. Именно поэтому дополнительные измерения являются ненаблюдаемыми. Гиперповерхность, на которой локализованы частицы, называют для краткости браной.

Главным отличием представления «мир на бране», от подхода Калуцы – Клейна является то, что обычные поля материи локализованы на бранах и являются четырехмерными, а не многомерными объектами. Мотивацией к такой схеме локализации материи и гравитации на бране являются работы [7; 121], в которых она была предложена для фермионной материи на фоне кинка - решения нелинейного уравнения для самодействующего скалярного поля, описывающего доменную стенку. Следующая мотивация следует из низкоэнергетической теории суперструн, в которой браны возникают как связанные состояния (D_p - браны) открытых струн. Они представляют собой $(p + 1)$ - мерные времениподобные поверхности, на которых локализованы концы открытых струн.

Во многих исследованиях брана рассматривается как элементарный геометрический объект нулевой толщины. В эффективной многомерной теории поля предложенной Рубаковым и Шапошниковым [2], брана является доменной стенкой, порождаемой фоновыми скалярными и/или гравитационными полями, когда их вакуумные конфигурации обладают нетривиальной топологией. Материя, взаимодействующая с этими фоновыми полями, локализуется в определенной окрестности доменной стенки, которая может быть охарактеризована некоторой ненулевой толщиной. По этой причине иногда употребляется название «толстая брана» («thick brane»).

Подробное описание локализации материи на этих доменных стенках представляет особый интерес, поскольку оно может как дать важный ключ к низкоэнергетической физике, так и установить связь с моделями фундаментальных бран, прояснить сущность предельного перехода к бране нулевой толщины.

Доменная стенка в четырехмерном пространстве является самой простейшей космологической моделью мира на бране. Поскольку эта модель ухватывает многие черты более сложных моделей. Такая модель формулируется в $(4+1)$ - мерном пространстве-времени и содержит действительное скалярное поле со скалярным потенциалом $V(\varphi)$, обладающим симметрией $\varphi \rightarrow -\varphi$ и имеющим глобальные минимумы при $\varphi = \pm v$. Для определенности можно считать, что

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2 \quad (4.1)$$

В этой модели имеется доменная стенка - решение $\varphi_k(z)$ зависящее от одной пространственной координаты и в точности совпадающее с кинком (рисунок 4.1). Дополнительную пятую координату мы обозначаем буквой z , четыре остальных, включая время мы будем обозначать - x^μ , а все пять координат пространства-времени, мы обозначим $X^A = (x^\mu, z)$.

Конфигурация кинка, имеет вид

$$\varphi_k(z) = v \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v z \right), \quad (4.2)$$

и асимптотически

$$\varphi_k(z) \rightarrow \pm v \text{ при } z \rightarrow \pm\infty.$$

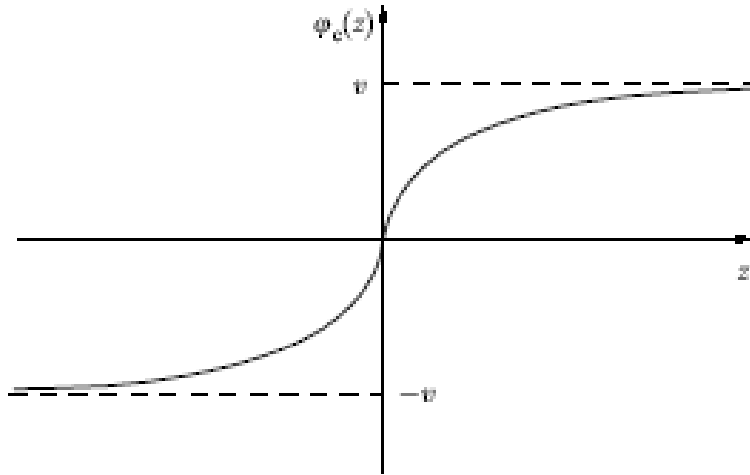


Рисунок 4.1 - Решение для доменной стенки

Предположим, что центр кинка находится при $z = 0$ и рассмотрим возмущения скалярного поля относительно решения $\varphi_k(z)$, т.е. запишем

$$\varphi(X^A) = \varphi_k(z) + \phi(X^A). \quad (4.3)$$

Действие для этих возмущений имеет вид

$$S_\phi = \int d^5 X \left(\frac{1}{2} \partial_A \phi \partial_A \phi - \frac{1}{2} V''(\phi_k(z)) \phi^2 - \frac{1}{3!} V'''(\phi_k(z)) \phi^3 - \dots \right), \quad (4.4)$$

где штрих означает производную по ϕ . Сначала рассмотрим малые возмущения, для которых в действии (4.4) достаточно удерживать члены, квадратичные по ϕ . Тогда, уравнение поля будет иметь вид

$$-\partial_A \partial_A \phi - V''(\phi_k(z)) \phi = 0. \quad (4.5)$$

В силу трансляционной инвариантности этого уравнения (как и действия (4.4)) вдоль координат x^μ , продольных к стенке, решения уравнения (4.5) можно искать в виде линейной комбинации плоских волн вида

$$\phi(x^\mu, z) = e^{-ip_\mu x^\mu} \xi(z).$$

Тогда для $\xi(z)$ будем иметь уравнение

$$-\partial_z^2 \xi + U(z) \xi = p^2 \xi, \quad (4.6)$$

где $U(z) = V''(\phi_k(z))$ и $p^2 = p_\mu p^\mu$ - квадрат продольного импульса. Уравнение (4.6) является уравнением на собственные значения для величины p^2 . У этого уравнения самым низким собственным значением является

$$p^2 = 0.$$

Возможны другие собственные значения в дискретном спектре с $p^2 \sim \mu^2 \equiv \lambda v^2$, а непрерывный спектр начинается с $p^2 = 2\mu^2$. Волновая функция нулевой моды ($p^2 = 0$) равна, с точностью до нормировки,

$$\xi_0(z) = \partial_z \phi_k(z) = \frac{const}{ch^2\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v z\right)}.$$

Она локализована вблизи центра кинка и быстро убывает при $|z| \rightarrow +\infty$. Решение имеет вид:

$$\phi(x^\mu, z) = e^{-ip_\mu x^\mu} \xi_0(z), \quad (4.7)$$

которое представляет собой волну, распространяющуюся вдоль доменной стенки

со скоростью света; эта волна локализована в поперечном направлении на масштабе порядка μ^{-1} . Если ограничиться только такими волнами, то теория станет эффективно четырехмерной: все события будут разворачиваться на доменной стенке, а дополнительное измерение прямо проявляться не будет. В квантовой теории волнам (4.7) соответствуют частицы, имеющие нулевую четырехмерную массу и движущиеся только вдоль стенки. При учете нелинейных членов в действии (4.4) эти частицы взаимодействуют между собой.

Непрерывному спектру уравнения (4.6) соответствуют волны, убегające на бесконечность (и прибегающие из бесконечности) в дополнительном измерении. Вдали от кинка $U(z)$ равно константе $2\mu^2$, и решения из непрерывного спектра имеют вдали от кинка вид

$$\xi(z) = e^{ip_z z},$$

с $p_z^2 = p^2 - 2\mu^2$. Вместе с фактором $e^{-ip_\mu x^\mu}$ они представляют из себя массивные плоские волны

$$\phi(X^A) = e^{-ip_A X^A}, \quad (4.8)$$

с $p_A p^A = 2\mu^2$. Эти волны распространяются во всем пятимерном пространстве-времени. Им соответствуют частицы с массой $\sqrt{2\mu}$, живущие в пятимерном пространстве-времени.

При низких энергиях существенны только частицы, локализованные на доменной стенке и имеющие волновые функции вида (4.7): если их энергии $p^0 \equiv E$ малы по сравнению с μ , то в их столкновениях частицы с нелокализованными волновыми функциями (4.8) рождаться не могут в силу сохранения энергии (энергия нелокализованных частиц никак не меньше их пятимерной массы $\sqrt{2\mu}$). Это и есть картина «мир на бране»; в качестве браны выступает доменная стенка. Нетрудно найти эффективное четырехмерное действие, описывающее «мир на бране» при низких энергиях. Для этого достаточно ввести четырехмерное поле $\tilde{\phi}(x^\mu)$, через которое существенная часть пятимерного поля выражается следующим образом:

$$\phi(x^\mu, z) = \tilde{\phi}(x^\mu) \xi_0(z). \quad (4.9)$$

Эффективное низкоэнергетическое действие для поля $\tilde{\phi}(x^\mu)$ получается подстановкой (4.9) в исходное действие (4.4) и взятием интеграла по dz . Если нормировать нулевую моду так, что

$$\int \xi_0^2(z) dz = 1,$$

то кинетический член будет иметь канонический вид, а все эффективное действие станет равным

$$S_{\text{эфф}} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\phi})^2 - \tilde{\Lambda}_{(3)} \tilde{\phi}^3 - \tilde{\Lambda}_{(4)} \tilde{\phi}^4 - \dots \right], \quad (4.10)$$

где

$$\tilde{\Lambda}_{(3)} = \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} dz V'''(\varphi_k(z)) \xi_0^3(z).$$

Действие (4.10) описывает безмассовое четырехмерное поле с самодействием.

Когда энергии частиц, сталкивающихся на бране, становятся сравнимыми с μ ситуация меняется. При достаточно высоких энергиях возможно рождение частиц с волновыми функциями непрерывного спектра четырехмерных p^2 , т.е. частиц, распространяющихся во всем пятимерном пространстве-времени. Эти частицы не привязаны к бране и улетают в область $|z| \rightarrow +\infty$. С точки зрения наблюдателя на бране такой процесс выглядел бы как процесс с не сохранением энергии, т.е. процесс типа

$$\tilde{\phi} + \tilde{\phi} \rightarrow \text{ничто}$$

или

$$\tilde{\phi} + \tilde{\phi} \rightarrow \tilde{\phi} + \text{ничто}.$$

В нашем случае $\tilde{\phi}$ обозначает безмассовый бозон, локализованный на бране (квант поля $\tilde{\phi}(x^\mu)$). Разумеется, в полной теории энергия сохраняется: *ничто* - здесь обозначает частицы, покидающие брану и поэтому не регистрируемые наблюдателем на бране.

Разумеется, в качестве модели браны, не обязательно рассматривать доменную стенку. Вместо этого можно, например, выбрать вихрь Абрикосова-Нильсена-Олесена в (5+1) - мерном пространстве-времени, монополь 'тХоофта-Полякова в (6+1) - мерном или инстантон в (7+1)-мерном пространстве-времени, соответственно. Каждое из этих решений сосредоточено в окрестности 3 - мерной гиперповерхности, вложенной в пространство большей размерности, и поэтому может выступать в качестве модели браны.

Существование безмассовых четырехмерных скаляров, распространяющихся вдоль браны (в нашей модели вдоль доменной стенки), является весьма общим явлением. По существу мода (4.9) является голдстоуновской модой,

соответствующей нарушению доменной стенкой инвариантности относительно трансляций вдоль оси z . Физически эта мода описывает колебания самой стенки. Такие же моды существуют и тогда, когда в качестве браны выступает какой-либо другой солитон, при этом их количество равно количеству измерений, поперечных к бране, т.е. $(d-4)$, где d - полная размерность пространства-времени. Для браны - вихря таких мод две, для браны-монополя - три и т.д.

В данном разделе мы будем исследовать простейшие астрофизические объекты в модифицированной теории гравитации: доменные стенки в 6-мерном пространстве-времени. Доменные стенки впервые были предсказаны в теории гравитации Эйнштейна. В этой теории они были определены как топологические дефекты, возникающие, когда вакуум имеет разные компоненты.

На этапе создания Вселенной доменные структуры могли быть сформированы механизмом Киббла [9], в результате чего различные области горячей Вселенной охлаждались до разных изолированных минимумов потенциала. Доменные стенки также могут быть сформированы как границы (истинных) вакуумных пузырьков, создаваемых при квантовом распаде ложного вакуума. Кроме того, Вселенная может родиться от квантового процесса туннелирования из ничего в разные доменные стены между ними [122,123].

В космологии предполагается, что при наступлении инфляции могут возникать топологические дефекты. Однако, исследования показали, что такие дефекты до сих пор не обнаружены. Если в нашей вселенной есть некоторые дефекты, то их плотность должна быть очень малой. Топологические дефекты также могут быть источником темной энергии и крупномасштабной структурой Вселенной. Поэтому исследования топологических дефектов полезны для понимания истории нашей вселенной. Можно показать, что при наличии некоторого дискретного множества вакуумов между ними создаются доменные стены. Это означает, что доменные стенки возникают, когда спонтанно нарушается дискретная группа симметрии.

Мы рассмотрим плоские решения в модифицированной теории гравитации $-\alpha R^n$ в 4 и 6-мерных пространствах – времени, аналогично тому как это было сделано в [35,124], в которой thick brane рассматривалась в 5-мерном пространстве-времени.

Прежде всего, гравитационное действие имеет следующий вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{2} + f(R) \right]. \quad (4.11)$$

Мы исходим из того, что $8\pi G = c = 1$. После вариации гравитационного действия (4.11) относительно 4-мерного метрического тензора g_{AB} мы получаем уравнения движения:

$$R^\beta_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\beta_\alpha R = \hat{T}^\beta_\alpha, \quad (4.12)$$

где индексы пробегает значения $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$, и

$$\hat{T}_\alpha^\beta = - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) R_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta f + \left(\delta_\alpha^\beta g^{\mu\nu} - \delta_\alpha^\mu g^{\beta\nu} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right)_{\mu\nu} \right] \quad (4.13)$$

определяет источник эффективной геометрической материи. Заметим, что уравнения движения в $f(R)$ - гравитации, записанные в виде (4.12) имеют структуру, которая совпадает с уравнениями Эйнштейна, в которых источником гравитационного поля является эффективный тензор энергии-импульса (4.13).

Как было сказано выше, мы исследуем следующую форму $f(R)$ гравитации :

$$f(R) = -\alpha R^n, \quad (4.14)$$

где $\alpha > 0$ и n некоторые константы. Выбирая $f(R) \sim R^n$, можно показать, что такие модели находятся в хорошем согласии с наблюдательными данными [125 - 130]. Чтобы исследовать настоящее ускоренное расширение Вселенной, существуют некоторые диапазоны n , которые не противоречат наблюдательным космологическим данным. Поэтому представляется естественным рассматривать эти значения n для доменных стенок.

Мы остановимся на следующем выборе метрики для 4-мерной доменной стенки:

$$ds^2 = e^{2\beta(z)}(dt^2 - dx^2 - dy^2) - dz^2, \quad (4.15)$$

Подставив метрику (4.15) в формулы (4.12) и (4.13), можно получить следующие уравнения модифицированной теории гравитации:

$$\begin{aligned} e^{2\beta(z)} \left[3 \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 + 2 \left(\frac{d^2\beta}{dz^2} \right) \right] &= 6 \frac{d^4\beta}{dz^4} f_{RR} + 36 \left(\frac{d^3\beta}{dz^3} \right)^2 f_{RRR} + \\ &36 \frac{d\beta}{dz} \left[8 f_{RRR} \frac{d^2\beta}{dz^2} + f_{RR} \right] \frac{d^3\beta}{dz^3} - \frac{1}{2} \left[-1152 f_{RRR} \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 - 48 f_{RR} \right] \left(\frac{d^2\beta}{dz^2} \right)^2 - \\ &\left(\frac{d^2\beta}{dz^2} \right) - \frac{1}{2} \left[-96 f_{RR} \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 + 2 f_R \right] - 3 \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 f_R + \frac{f}{2}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$3 \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 = -3 \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 f_R - 3 \frac{d^2\beta}{dz^2} f_R + \frac{f}{2} + 72 \frac{d^2\beta}{dz^2} \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 f_{RR} + 18 \frac{d^3\beta}{dz^3} \frac{d\beta}{dz} f_{RR}, \quad (4.17)$$

где первое уравнение соответствует $(\frac{t}{t})$, $(\frac{x}{x})$, $(\frac{y}{y})$ компонентам уравнения модифицированной теории гравитации, второе уравнение есть $(\frac{z}{z})$ компонента уравнения модифицированной теории гравитации. Вследствие тождеств Бианки уравнение (4.16) является следствием уравнения (4.17). Нам удобнее исследовать последнее уравнение (4.17) 3-го порядка в силу того, что первые три уравнения (4.16) являются более сложными уравнениями 4-го порядка.

Скалярная кривизна R в метрике (4.15):

$$R = \alpha \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 + 6 \left(\frac{d^2\beta}{dz^2} \right). \quad (4.18)$$

Таким образом, из (4.18) $f(R)$:

$$f(R) = -\alpha \left[\left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 + 6 \left(\frac{d^2\beta}{dz^2} \right) \right]^n. \quad (4.19)$$

Уравнение (4.17) после подстановки скалярной кривизны (4.19) принимает вид:

$$\beta''' - \frac{2(n-2)}{n(n-1)} \beta'^3 - \frac{4n^2-7n+4}{n-n^2} \beta' \beta'' + \frac{1}{n} \frac{\beta''^2}{\beta'} + (12\beta'^2 + 6\beta'')^{-n} \frac{6\beta'(2\beta'^2 + \beta'')^2}{(n-1)n\alpha} = 0. \quad (4.20)$$

Далее мы исследуем приближенное поведение решений уравнения (4.20) в точке $z = 0$. В начале координат, центр доменной стенки для уравнения (4.20) имеет следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\beta[z] = \beta_0 + \gamma z^\delta + \dots \quad (4.21)$$

где β_0, γ, δ некоторые константы. Чтобы обеспечить регулярность решений в начале координат (в центре доменной стенки) мы собираем все слагаемые уравнения (4.20) со степенями $z^{\delta-3}$ и приравниваем их к нулю. Выполнив вышесказанное, получим:

$$\frac{1}{n}(\delta - 1) = (\delta - 2) \quad (4.22)$$

После несложных вычислений получим условие для δ :

$$\delta = \frac{2n-1}{n-1}. \quad (4.23)$$

Также, чтобы обеспечить регулярность уравнения (4.20) необходимо чтобы β''' было бы конечным при $z \rightarrow 0$, что приводит к $\delta > 3$. Учитывая это условие

находим, что решения могут существовать лишь когда n находится в следующем промежутке значений:

$$1 < n < 2. \quad (4.24)$$

Численное решение уравнения (4.20) приводит к результатам, приведенным на рисунке 4.2 (а, б), где представлены фазовый портрет для 4-мерной доменной стенки (рисунок 4.2а) и браны в 6-ти мерном пространстве – времени (рисунок 4.2 б), что позволяет сравнить полученные результаты с метрикой 5-ти мерной thick brane, рассмотренной в работах [35, 124].

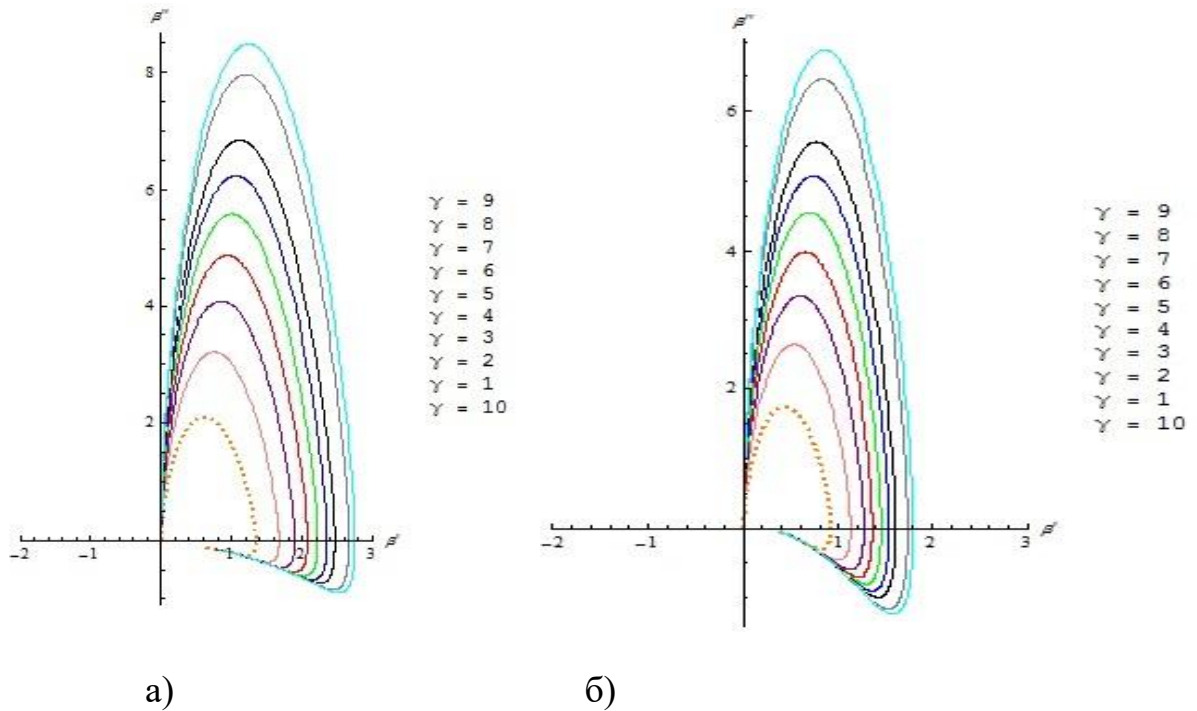


Рисунок 4.2 - Фазовый портрет для 4 - мерной (а) и 6 - мерной (б) браны с $n = 5/3$.

4.2 Бранные решения в модифицированной $f(R) \sim R^n$ гравитации

4.2.1 Брана в 5-ти мерном пространстве – времени

Для последовательного описания настоящей Вселенной требуется создание унифицированной теории элементарных частиц и космологии. В настоящее время одним из актуальных исследований является рассмотрение модели Вселенной в многомерной теории, в которой наш мир представляет собой брану в искривленном 5-ти мерном пространстве - времени. При этом, одна координата является временной, а четыре - пространственными. В этом разделе рассматривается модель thick branes в 5-мерных модифицированных $f(R) \sim R^n$ гравитациях.

В этой части мы рассматриваем модель thick branes в 6-мерном пространстве - времени. Браны могут быть разделены на тонкие и thick branes. Тонкие браны имеют дельта - подобную локализацию материи на бране [5, 6]. С реалистической точки зрения, брана должна иметь некоторую толщину. Понятие «толщина» браны дает новые возможности и новые проблемы. Брана должна удовлетворять двум главным требованиям: 1) решения должны быть регулярными и либо асимптотически плоскими, либо иметь de Sitter (анти - de Sitter) асимптотику; 2) обычная материя должна быть локализована на бране. Большинство моделей тонких бран используют скалярные поля в рамках теории гравитации Эйнштейна [22]. Однако, можно было бы ожидать существование брано - подобных решений в вакууме также для некоторых видов модифицированных теорий гравитаций, называемых теориями гравитаций с высшими производными.

В настоящее время также рассматриваются теории гравитации с более сложными комбинациями инвариантов кривизны. В частности, в низкоэнергетическом пределе М-теории появляется инвариант Гаусса-Боннэ, который может быть использован в лагранжиане теории гравитации

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (4.25)$$

где R – скалярная кривизна; $R_{\mu\nu}$; $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Это показывает, что такие модели с одной стороны не противоречат наблюдениям в солнечной системе и с другой стороны успешно описывают присутствующее ускоренное расширение Вселенной [54, 131]. Эти модели могут быть использованы в описании эффективных уравнений состояний как для эффективной космологической постоянной так, и для динамического случая (quintessence, фантом черной энергии), а также для описания перехода с одного типа (quintessence) темной энергии в другой вид (фантомные поля). Также существуют теории, которые используют обе теории $f(R)$ и инвариант Гаусса-Боннэ для описания темной энергии [132].

Другое использование модифицированной теории гравитации содержит рассмотрение космологических и астрофизических моделей. В частности, в статье [133] описывается теория, которая описывает бранную материю и модели черной дыры

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left[aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{k^2}R - \Lambda + L_m \right], \quad (4.26)$$

где L_m – лагранжиан материи; a , b , c – произвольные константы. Полученные результаты позволяют оценить свойства моделей в рамках модифицированной теории гравитации с высшими производными. Более того, некоторые результаты описывают применение теории гравитации с высшими производными для создания модели браны мира [29, 135-137]. В частности, в статье [138] была рассмотрена модель браны в теории $f(R) = R + \alpha R^2$. Используя конформную эквивалентность такой модели гравитации и гравитацию Эйнштейна-Хилберта со скалярным источником поля, авторы переписали $f(R)$ уравнения в форму

уравнений Эйнштейна с некоторыми источниками скалярного поля. Они показали, что в таких моделях содержатся браноподобные решения. Здесь необходимо обратить внимание на то, что использование конформного преобразования, т.е. переход от системы Джордана к системе Эйнштейна не всегда возможно. Например, если там содержатся любые другие поля материи, то структурные преобразования в теории со скалярными полями могут привести к неоднозначности [135]. Следовательно, мы предпочитаем изучать модели thick branes без использования этих преобразований.

Мы будем работать в 5-ти мерном пространстве-времени. Соответствующее гравитационное действие может быть представлено в следующей форме

$$S = \int d^5x \sqrt{-G} \left[-\frac{R}{2} + f(R) \right], \quad (4.27)$$

где $f(R)$ произвольная функция скалярной кривизны R . Вариация действия по метрике тензора G_{AB} приводит к гравитационному уравнению:

$$R_A^B - \frac{1}{2} \delta_A^B R = T_A^B, \quad (4.28)$$

где $A, B, = 0, 1, 2, 3, 5$ и

$$T_A^B = - \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) R_A^B - \frac{1}{2} \delta_A^B f + (\delta_A^B g^{LM} - \delta_A^L g^{BM}) \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right)_{;L;M} \right\}, \quad (4.29)$$

определяет эффективный геометрический источник материи с нетривиальной зависимостью от кривизны. Уравнение (4.28) имеет структуру, которая совпадает со стандартными уравнениями общей теории относительности, где источником гравитационного поля является эффективный тензор энергии – импульса (4.29). Можно проверить, что закон сохранения момента энергии удовлетворяет условиям в работах [24-27].

Мы будем рассматривать $f(R)$ в специальной форме

$$f(R) = -\alpha R^n, \quad (4.30)$$

где $\alpha > 0$ и n – постоянные. В [27, 28] было показано что, можно получить современное ускоренное расширение Вселенной, не противоречащее наблюдаемым космологическим данным с n в некотором диапазоне. Следовательно, в этой статье мы можем рассмотреть некоторые значения n для модели браны.

Рассмотрим плоскую модель браны с метрикой

$$ds^2 = e^{2y(z)} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - dz^2, \quad (4.31)$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$; функция $y(z)$ зависит только от пятой координаты z и метрика Минковского $\eta_{\alpha\beta} = \{1, -1, -1, -1\}$. Подставляя эту метрику в уравнения (4.28) и (4.29) получаем уравнения модифицированной теории гравитации

$$p \frac{d^2 p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + 5p \frac{dp}{dy} = \frac{1}{32p^2 f_{RR}} \left[4p \left(\frac{dp}{dy} + p\right) f_R - \frac{1}{2} f - 6p^2 \right], \quad (4.32)$$

где вводится новая функция $p = \frac{dy}{dz}$, индекс R обозначает производную по отношению к скалярной кривизне R . Уравнение (4.32) это дифференциальное уравнение третьего порядка по отношению к метрике функции y , а остальные компоненты уравнения четвертого порядка. Используя выражение для $f(R)$ из (4.30) можно записать уравнение для y в форме

$$y''' - \frac{1}{n} \frac{y''^2}{y'} + \left[5 - \frac{\frac{7n-5}{2}}{n(n-1)} \right] y' y'' - \frac{5}{2} \frac{n-5}{n(n-1)} y'^3 = \frac{12y'}{\alpha 8^n n(n-1)} \left(y'' + \frac{5}{2} y'^2 \right) \alpha^{2-n}, \quad (4.33)$$

где штрих обозначает производную по z . Заметим, что введение новых переменных $\bar{z} = \bar{\alpha} z$ и $\bar{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{2(1-n)}}$, приводит к тому, что уравнение (4.33) становится независимым от α . Все другие решения получены путем масштабирования.

Можно также увидеть из уравнения (4.33), что первая производная y' может быть нулевой только, если одновременно в этой же точке $y'' = 0$. Как будет показано ниже, существует особая точка в фазовой плоскости, где одновременно y' и y'' равны 0.

Из-за нелинейности уравнения (4.33) мы не можем найти аналитическое решение этого уравнения, поэтому мы будем искать численные решения этого уравнения. Но прежде всего мы исследуем качественное поведение решений уравнения (4.33). Для этой цели, мы перепишем это уравнение как дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = \frac{1}{n} \frac{y''^2}{y'} - \left[5 - \frac{\frac{7n-5}{2}}{n(n-1)} \right] y' y'' + \frac{5}{2} \frac{n-5}{n(n-1)} y'^3 + \frac{12y'}{\alpha 8^n n(n-1)} \left(y'' + \frac{5}{2} y'^2 \right)^{2-n}. \quad (4.34)$$

Особая точка это точка, в которой

$$y' = 0, y'' = 0, y''' = 0. \quad (4.35)$$

Для анализа поведения решений в особой точке, мы будем искать решение особой точки в следующем виде

$$y = y_{fp} + \gamma(z - z_{fp})^\beta, \quad (4.36)$$

где β, γ некоторые константы и место положения особой точки обозначим $z = z_{fp}$. В дальнейшем мы положим $z_{fp} = 0$. Чтобы обеспечить конечность всех этих выражений мы должны взять $\beta > 3$. Подставляя эти выражения в третье уравнение из (4.34), мы находим

$$\begin{aligned} \gamma\beta(\beta - 1)(\beta - 2) &= \frac{1}{n}\gamma\beta(\beta - 1)^2 - \left[5 - \frac{7n - 5}{n(n - 1)} \right] \gamma^2\beta^2(\beta - 1)(z - z_{fp})^\beta + \frac{5}{2} \frac{n - \frac{5}{2}}{n(n - 1)} \times \\ &\times \gamma^3\beta^3(z - z_{fp})^{2\beta} + \frac{12}{\alpha 8^n n(n - 1)} (\gamma\beta)^{3-n} (\beta - 1)^{2-n} (z - z_{fp})^{\beta(2-n)+2(n-1)}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Так как β положительное, тогда второй и третий члены с правой стороны стремятся к 0 при $z \rightarrow z_{fp}$. Четвертый член будет стремиться к 0 если

$$\beta(2 - n) + 2(n - 1) > 0. \quad (4.38)$$

Если эти условия будут выполнены, тогда пренебрегая членами пропорциональности со степенями $(z - z_{fp})$, мы получим из (4.37)

$$\beta - 2 = \frac{1}{n}(\beta - 1),$$

Откуда

$$\beta = \frac{2n-1}{n-1}. \quad (4.39)$$

Используя эти выражения, мы имеем из (4.38) что n должно быть положительное. Согласно условию $\beta > 3$, мы получаем из последнего выражения что

$$1 < n < 2. \quad (4.40)$$

Таким образом, уравнение (4.34) имеет регулярные решения только при наличии особой точки A (4.35), в которой уравнение (4.34) имеет особенность типа $\frac{0}{0}$. Эти решения существуют только при выполнении условий (4.39) и (4.40).

Численно решая уравнение (4.34) можно получить фазовые портреты для модели с $n = 7/4$ для разных α (рисунок 4.3 - 4.5).

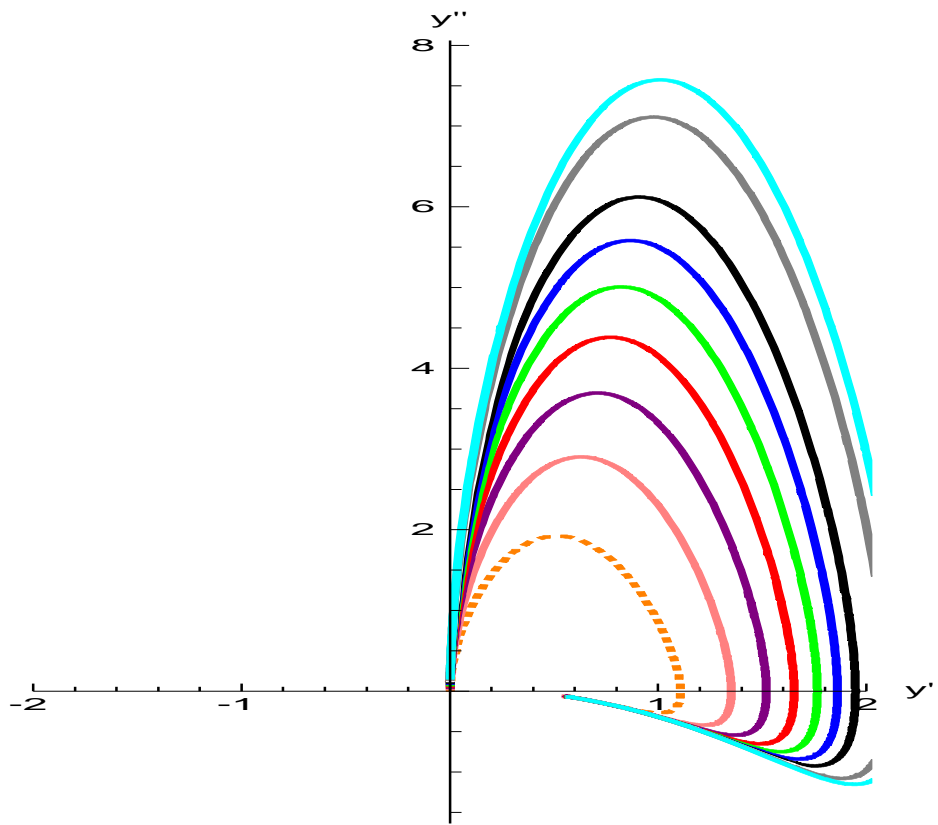


Рисунок 4.3 - Фазовый портрет для модели при $n = 7/4, \alpha = 1$.

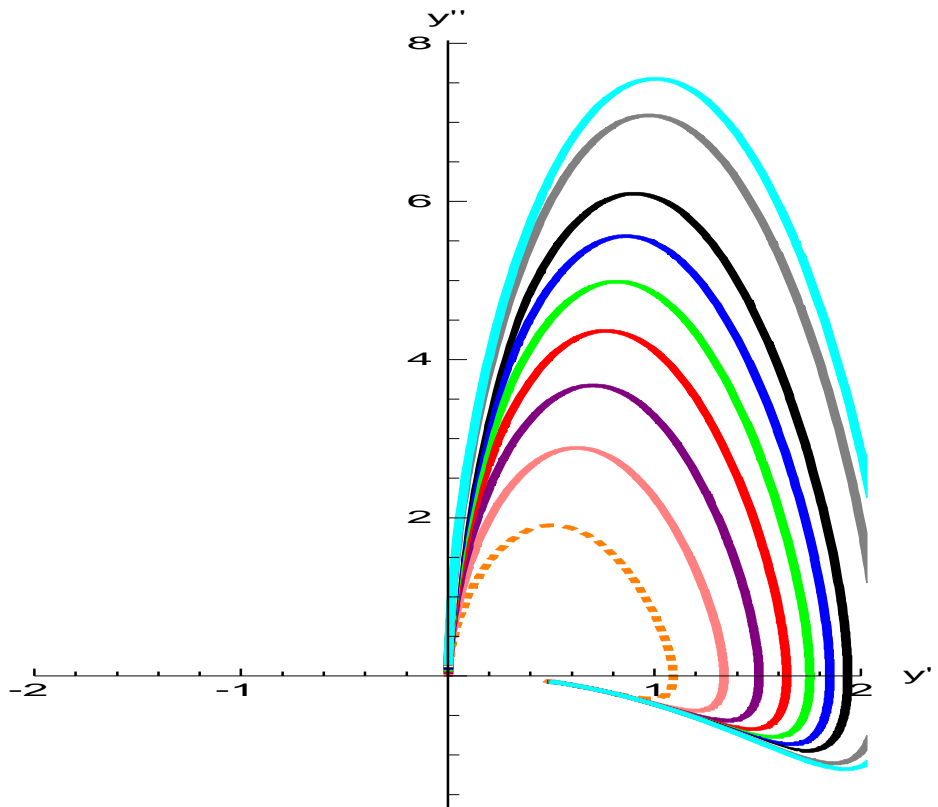


Рисунок 4.4 - Фазовый портрет для модели при $n = 7/4, \alpha = 2$.

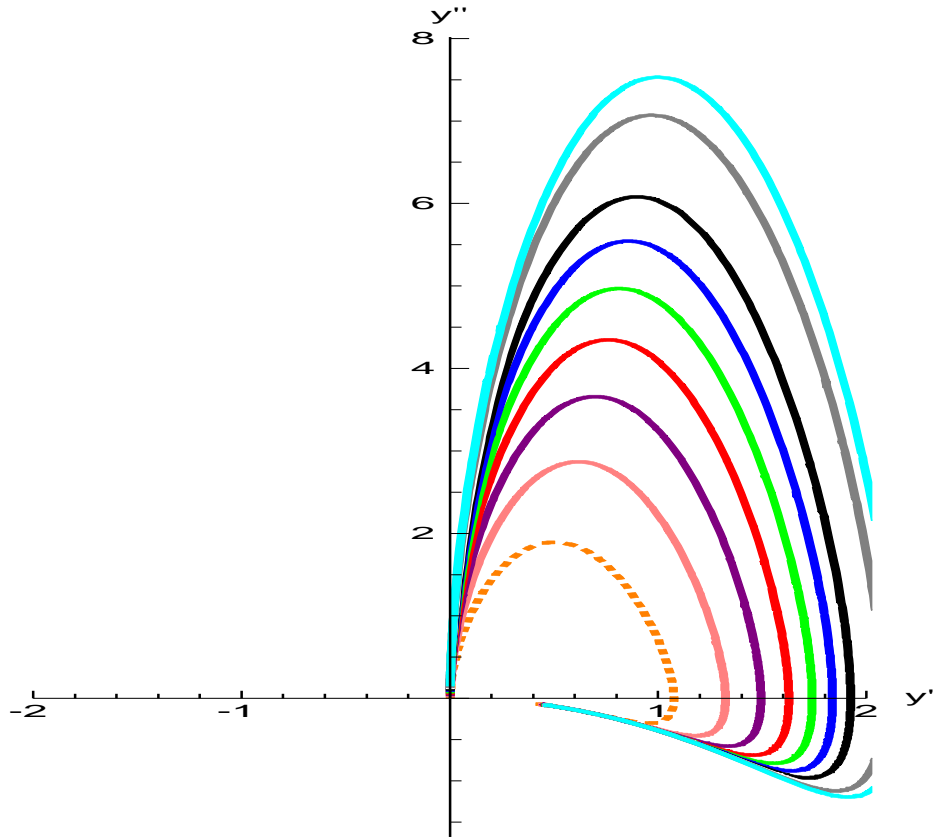


Рисунок 4.5 - Фазовый портрет для модели при $n = 7/4, \alpha = 10$.

Асимптотическая форма решения для произвольного n дается выражением

$$y_\infty = k_n |z|, k_n = \left[\frac{12}{\alpha \left(1 - \frac{2n}{5}\right) 20^n} \right]^{\frac{1}{2(n-1)}}. \quad (4.41)$$

Можно видеть, что существует верхняя граница для параметра n , $n < 7/4$, когда это асимптотическое решение является действительным.

Существование особой точки позволяет расположить брану непосредственно на этой точке. На самом деле, когда ищется модель толстой браны значение метрической функции y обычно выбирается 0 на бране. Такой выбор производной позволяет найти симметричные решения Z_2 [139]. В нашем случае, первая производная равна 0 только для особой точки в диапазоне параметра n упомянутый выше в (4.40). Однако, решения Z_2 не будут симметричными. Это можно увидеть из поведения решений вблизи особой точки, которые даются выражением (4.36). Поскольку уравнение (4.33) не зависит от координат z , тогда всегда возможен сдвиг позиции особой точки (рассматриваемой на бране) в точке $z_{fp} = 0$ при соответствующем преобразовании координаты z .

Таким образом, как видно из (4.36) значения функции y и ее производных будут зависеть от того, где мы находимся, справа или слева от особой точки браны. Произвольная постоянная γ в (4.36) определяет поведение около особой точки и определяет граничные условия особой точки для уравнения (4.33). Поскольку мы ищем регулярные решения, то для этого необходимо сделать соответствующий выбор γ для β , определяемое из уравнения (4.40). Если β четное число, то решение будет симметричным по отношению к $z = 0$ (Z_2 – симметричное). В этом случае γ должно быть положительное с обеих сторон браны которое дает регулярное решение. С другой стороны, если β нечетное число, то γ должна иметь различные значения с левой и с правой стороны браны (плюс при $z > 0$ и минус при $z < 0$). Делая только такой выбор знаков, решения должны быть регулярные с обеих сторон браны. В этом случае очевидно то, что решения Z_2 уже не будут симметричными. Таким образом, имеется 2 различных пространства с обеих сторон браны, склеенных на бране в особой точке. Но, в противоположность тонкой бране, где имеет место разрыв, в нашем случае, при рассматриваемой thick brane, метрика и ее производная остаются гладкой функцией (рисунок 4.6 – 4.9).

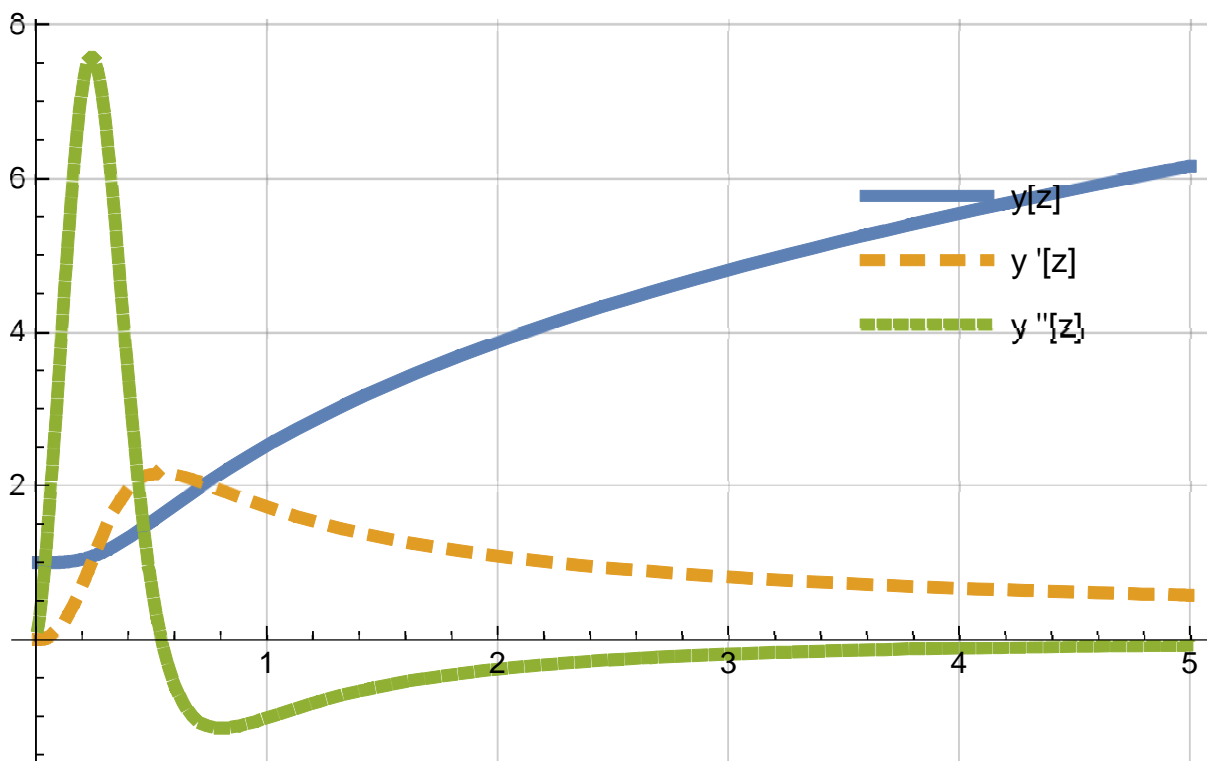


Рисунок 4.6 - Решения при $n = 7/4, \gamma = 10, \alpha = 1$.

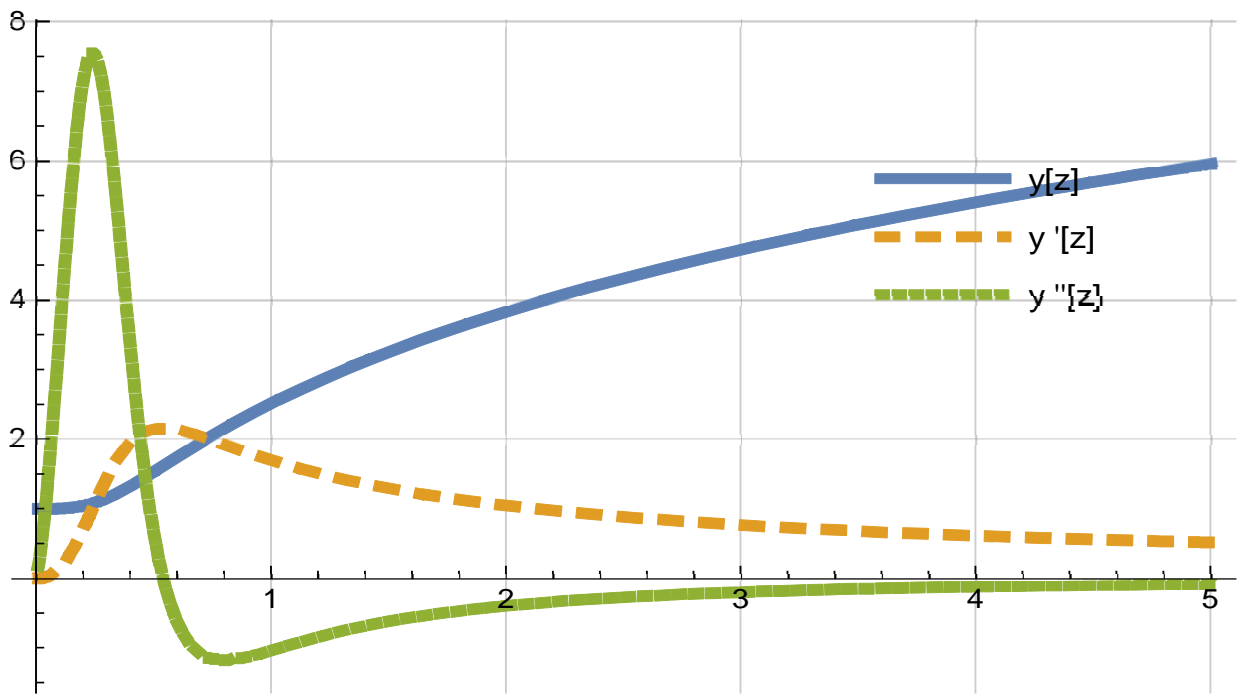


Рисунок 4.7 - Решения при $n = 7/4, \gamma = 10, \alpha = 2$.

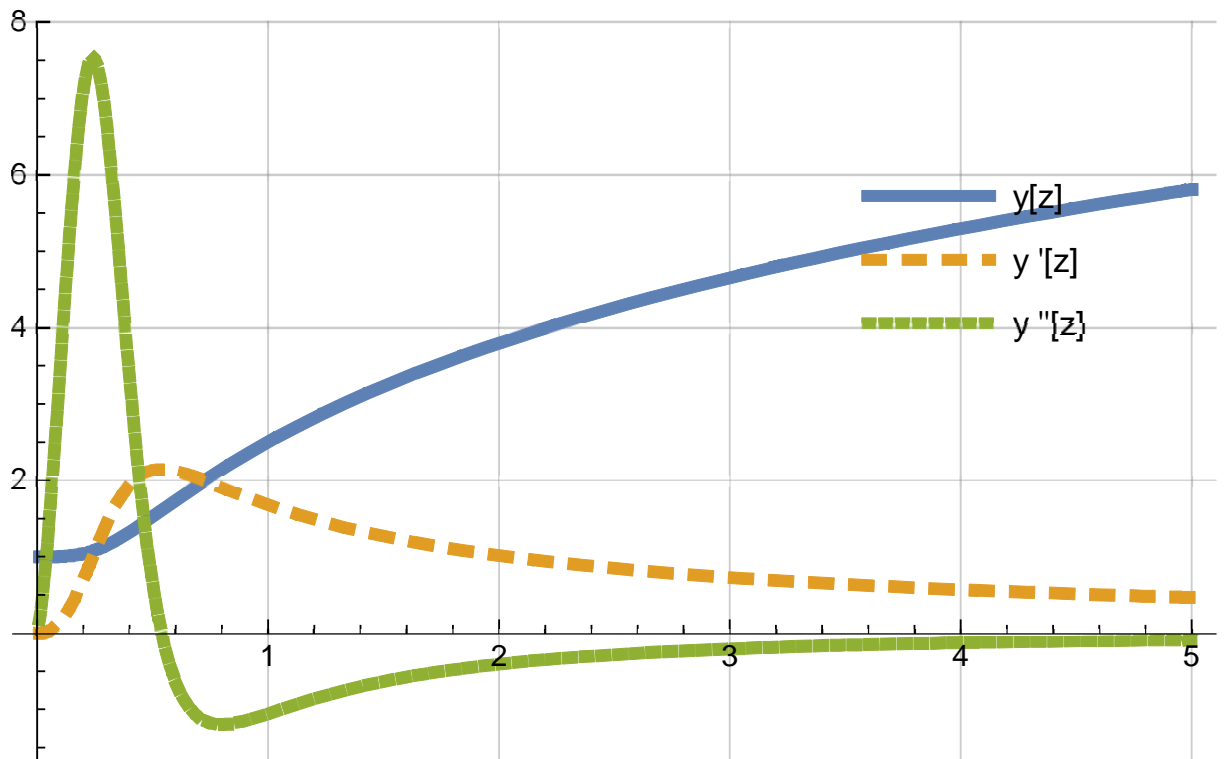


Рисунок 4.8 - Решения при $n = 7/4, \gamma = 10, \alpha = 10$.

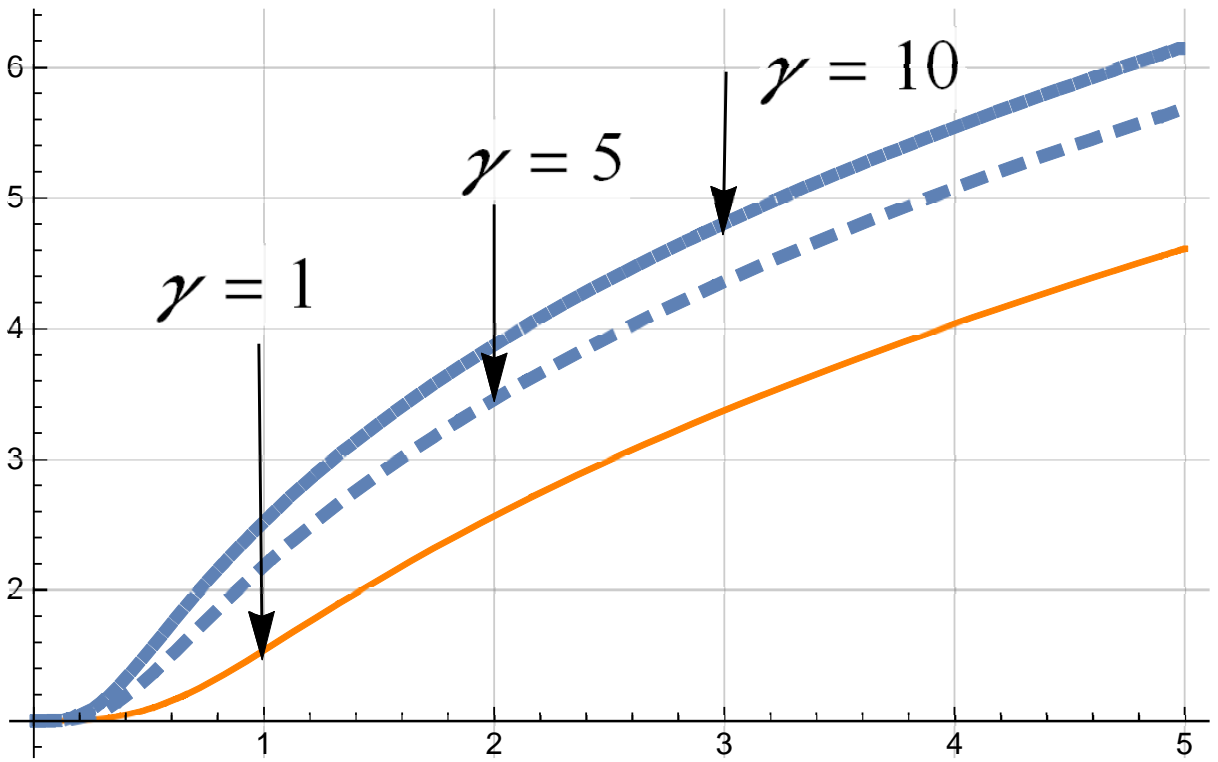


Рисунок 4.9 - Решения y при $\gamma = 1, \gamma = 5, \gamma = 10$.

4.2.2 Thick branes в 6-мерном пространстве-времени

В этой части мы рассматриваем модель thick brane в 6-мерном пространстве-времени. Гравитационное действие имеет следующий вид:

$$S = \int d^6x \sqrt{-{}^6g} \left[-\frac{R}{2} + f(R) \right], \quad (4.42)$$

где 6g – детерминант метрического тензора. Варьируя гравитационное действие (4.42) относительно 6-мерного метрического тензора g_{AB} мы получим аналогичные уравнения движения как и в предыдущих задачах, рассмотренные выше. Мы остановимся на следующем выборе метрики для thick brane:

$$ds^2 = e^{2\beta(z)}(dt^2 - dx^2 - dy^2 - dw^2 - dv^2) - dz^2, \quad (4.43)$$

где функция зависит только от шестой координаты z , это означает, что координаты $X = [t, x, y, w, v, z]$. Подставив метрику (4.43) в формулы (4.28) и (4.29) можно получить следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned}
2e^{\beta(z)} \left[5 \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 + 2 \left(\frac{d^2\beta}{dz^2} \right) \right] &= 10 \frac{d^4\beta}{dz^4} f_{RR} + 100 \left(\frac{d^3\beta}{dz^3} \right)^2 f_{RRR} + \\
+ 100 \left(\frac{d\beta}{dz} \right) \left[12 f_{RRR} \frac{d^2\beta}{dz^2} + f_{RR} \right] \left(\frac{d^3\beta}{dz^3} \right) &- \\
- \frac{1}{2} \left[-7200 f_{RRR} \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 - 120 f_{RR} \right] \left(\frac{d^2\beta}{dz^2} \right)^2 &- \\
- \frac{1}{2} \left[-480 f_{RR} \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 + 2 f_R \right] \left(\frac{d^2\beta}{dz^2} \right) &- 5 \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 f_R + \frac{f}{2},
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$10 \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 = -5 \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 f_R - 5 \frac{d^2\beta}{dz^2} f_R + \frac{f}{2} + 300 \frac{d^2\beta}{dz^2} \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 f_{RR} + 50 \frac{d^3\beta}{dz^3} \frac{d\beta}{dz} f_{RR}. \tag{4.45}$$

В нашей работе удобнее исследовать последнее уравнение (4.45) 3-го порядка в силу того, что первые три уравнения являются уравнениями 4-го порядка.

Метрика (4.43) имеет следующее выражение для скалярной кривизны R :

$$R = 30 \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 + 10 \left(\frac{d^2\beta}{dz^2} \right). \tag{4.46}$$

Таким образом, из $f(R) = -\alpha R^n$:

$$f(R) = -\alpha \left[30 \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 + 10 \left(\frac{d^2\beta}{dz^2} \right) \right]^n. \tag{4.47}$$

Используя выражение для $f(R)$ из (4.47), мы получаем уравнение для метрической функции β :

$$\beta''' - \frac{3(n-3)}{n(n-1)} \beta'^3 - \frac{6n^2-10n+6}{n-n^2} \beta' \beta'' - \frac{1}{n} \frac{\beta''^2}{\beta'} - (30\beta'^2 + 10\beta'')^{-n} \frac{20\beta'(3\beta'^2 + \beta'')^2}{(n-1)n\alpha} = 0. \tag{4.48}$$

Исследуя аналогичным образом приближенное решение уравнений в нуле получим такие же ограничения на n :

$$\begin{aligned}
1 &< n < 2, \\
\delta &> 3.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Численно решая все три уравнения для доменной стенки в 4-х мерном пространстве – времени и thick brane в 5 и 6 – мерных пространствах – времени, можно получить фазовые портреты для всех трех моделей с $n = 5/3$ (рисунок 4.10 - 4.12) и графики масштабных факторов (рисунок 4.13 – 4.15). Анализируя графики, можно рассмотреть поведение графиков функций a' , где a – масштабный фактор из уравнений (4.17), (4.45), (4.48).

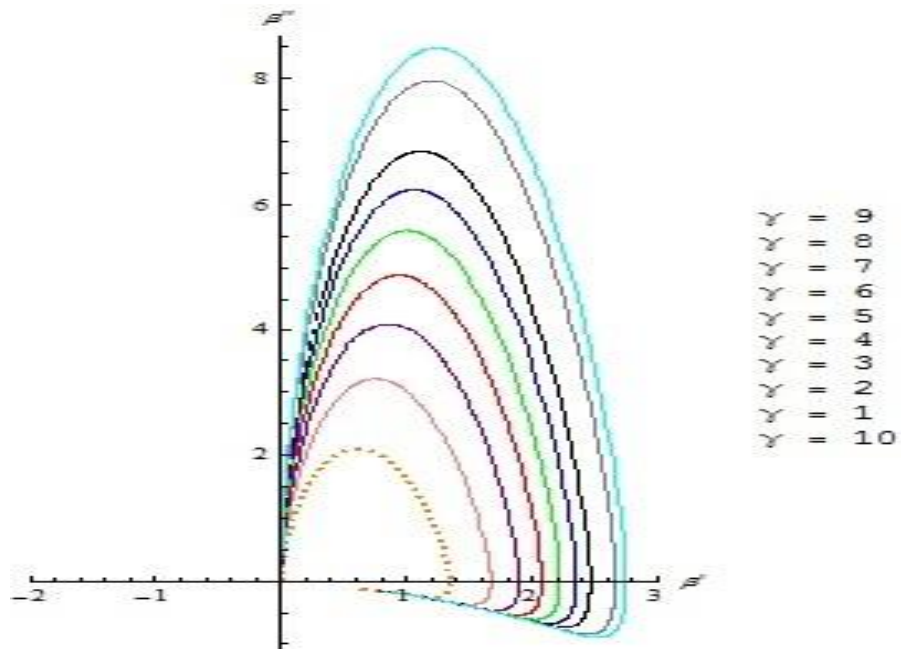


Рисунок 4.10 - Фазовый портрет для 4-х мерной доменной стенки с $n = 5/3$.

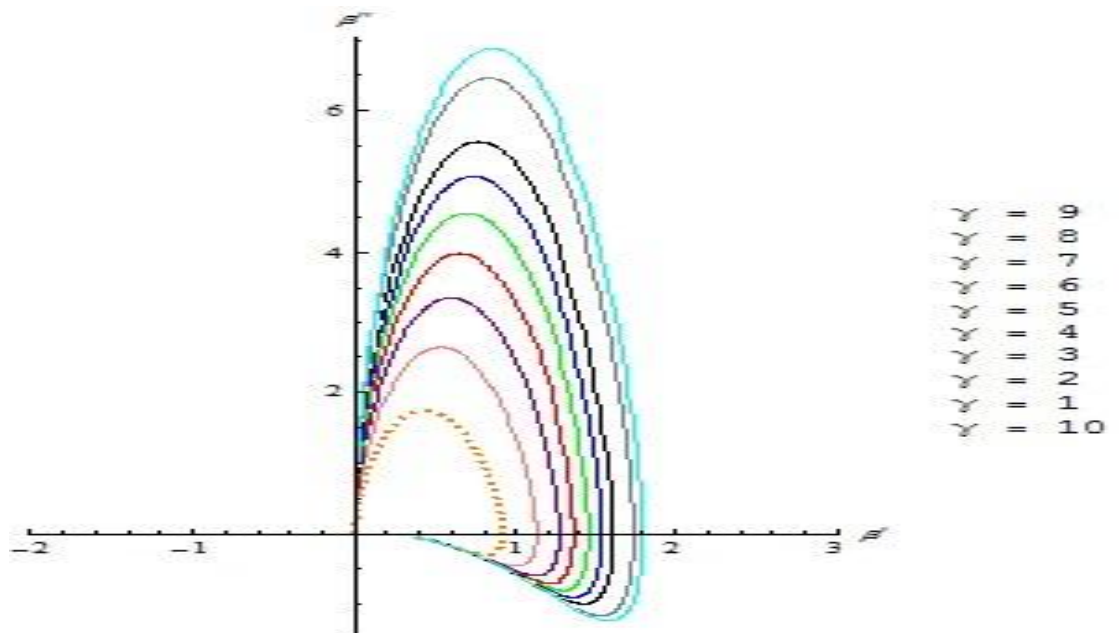


Рисунок 4.11 - Фазовый портрет для 5-ти мерной браны с $n = 5/3$.

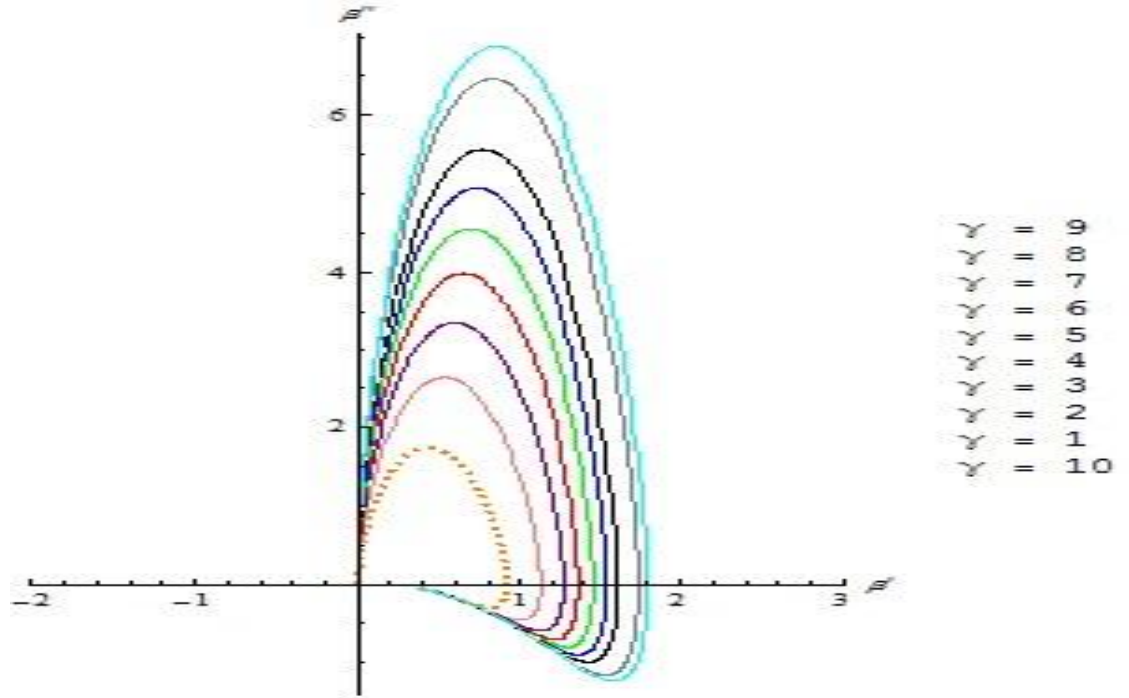


Рисунок 4.12 - Фазовый портрет для 6-ти мерной браны с $n = 5/3$.

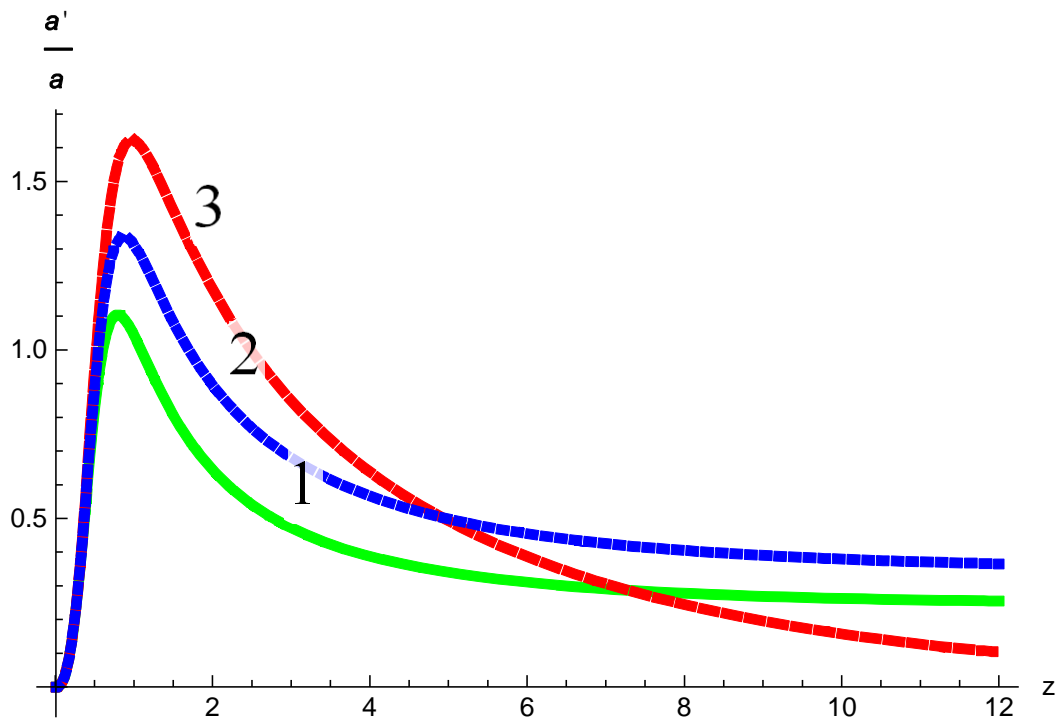


Рисунок 4.13 - Профиль функции $\frac{a'}{a}$, где $a = e^{\beta(z)}$, $n = \frac{5}{3}$, $\gamma = 2$, $\beta = \frac{7}{2}$;
 1) 6- мерные браны, 2) 4 - мерные доменные стенки, 3) 5-мерные браны.

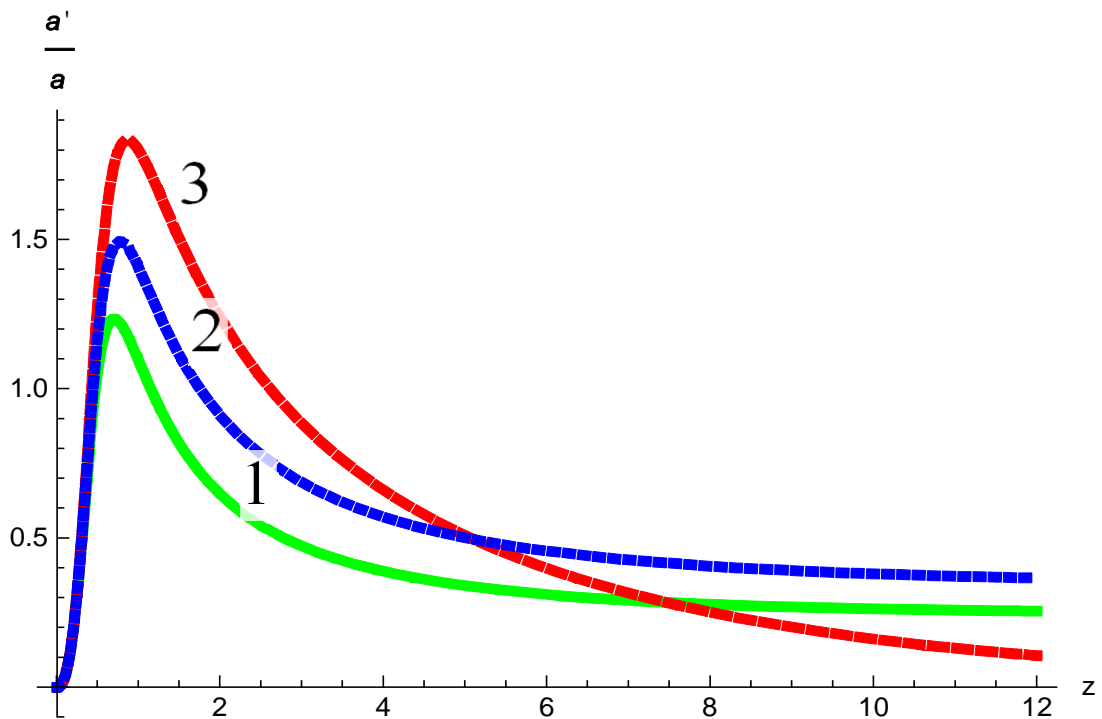


Рисунок 4.14 - Профиль функции $\frac{a'}{a}$, где $a = e^{\beta(z)}$, $n = \frac{5}{3}$, $\gamma = 3$, $\beta = \frac{7}{2}$; 1) 6-мерные браны, 2) 4-мерные доменные стенки, 3) 5-мерные браны.

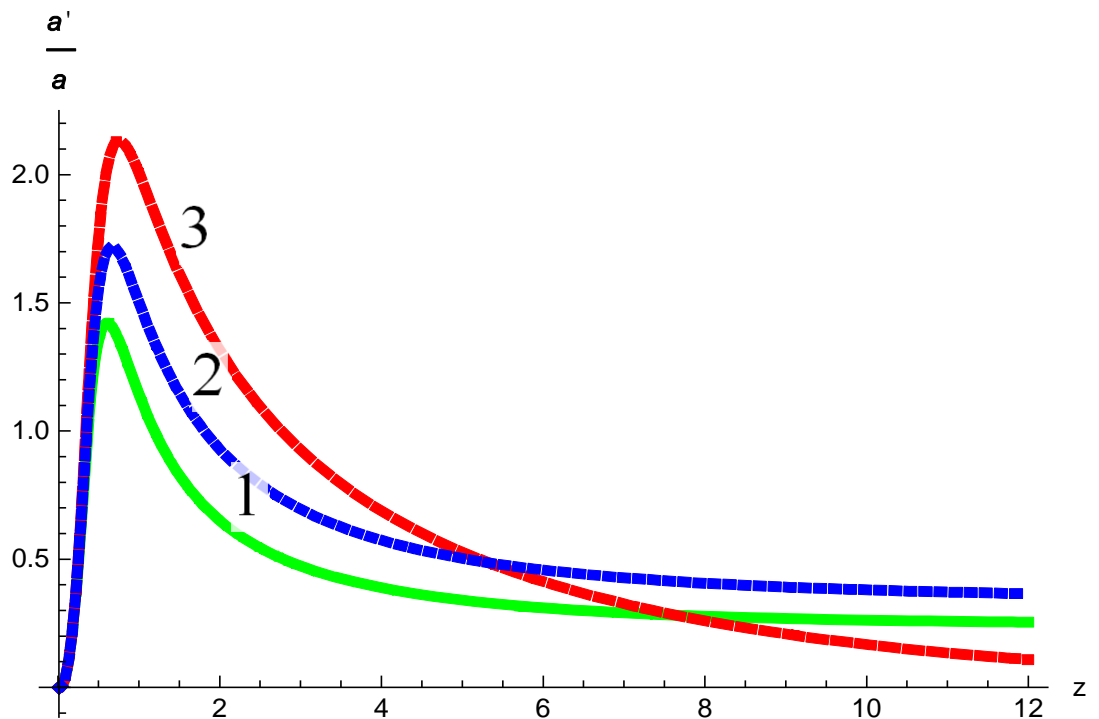


Рисунок 4.15 - Профиль функции $\frac{a'}{a}$, где $a = e^{\beta(z)}$, $n = \frac{5}{3}$, $\gamma = 5$, $\beta = \frac{7}{2}$; 1) 6-мерные браны, 2) 4-мерные доменные стенки, 3) 5-мерные браны.

Мы рассмотрели модель 5-мерной thick brane в $f(R) \sim R^n$ теории. Найдены регулярные решения, имеющие особую точку, расположенную в центре браны. Как следует из аналитического анализа поведения решений в окрестности этой точки, такая точка существует только при определенных значениях параметра n из (4.40), т.е. $1 < n < 2$. В этом случае первые три производные метрической функции u равны 0, что позволяет поместить брану непосредственно на особой точке $z = z_{fp}$.

Интересной особенностью этой модели является то, что существование особой точки обеспечивает наличие обеих Z_2 – симметричных и несимметричных решений, что зависит от значений параметров n . Показано, что можно не налагать никаких особых условий на параметры модели (условия тонкой настройки), которые обычно необходимы для других моделей браны [139].

Рассмотрено регулярное решение без особой точки для случая $n = 2$. Этот случай в рамках $f(R)$ теории использовался для тонкой браны. Показано, что модель тонкой браны сильно отличается от модели thick branes, рассматриваемой здесь. Полученное решение thick branes может стать интересной моделью для космологических исследований.

В данном разделе диссертации исследованы 4-мерные доменные стенки и 6-мерные thick branes в $-\alpha R^n$ гравитации. Были получены регулярные, плоско-симметричные решения в вакууме при определенных значениях параметра n и δ . Полученные решения представляют большой интерес, так как являются вакуумными решениями, в отличие от аналогичных решений в общей теории относительности. Эти результаты опубликованы в следующих работах [166 - 167, 169].

4.3 Thick D – branes

В настоящее время число публикаций в интенсивно развивающейся области как «Мир на бране» исследований исчисляется тысячами, предложено огромное количество моделей [7, 135, 140 - 142], различающихся по следующим основным признакам:

- Общая размерность D (в большинстве рассматривается модель при $D = 5$);
- Модели с одной или несколькими бранами;
- Плоские или искривленные браны;
- Компактное или некомпактное пространство вне браны;
- Возможное существование других полей, кроме гравитации (спинов 0, 1/2, 1) в пространстве вне браны;
- Тонкие или thick branes;
- Различные симметрии как браны, так и окружающего пространства и др.

Представленная классификация показывает, насколько должны быть

разнообразными наблюдательные предсказания, так как каждая из моделей дает свой набор эффектов.

Бесконечно тонкая брана может рассматриваться лишь как приближение, т.к. в любой фундаментальной теории существует предельная длина. На меньших масштабах классическое рассмотрение геометрии невозможно и бессмысленно. Тонкие браны рассматриваются как поверхностные распределения материи, происхождение которых не уточняется. Это можно видеть в известных моделях Рэндалла и Сундрума [5, 6].

Thick branes более реалистичны и строятся как распределение некоторых материальных, чаще всего скалярных полей негеометрического происхождения. Например, это доменные стенки или другие топологические дефекты, рассмотренные в работах [143 - 148].

D – branes является весьма важным объектом в теории струн. В их присутствии концы струн прикрепляются к D – brane и двигаются в некоем объемлющем пространстве. В [31] было показано, что D – branes на самом деле являются решениями типа black p -brane в супергравитации. В свою очередь, p -brane являются протяженными решениями в низкоэнергетической теории струн [32], в которых имеется горизонт событий. Эти решения получены при наличии скалярного и тензорного полей. Естественно, что в этом случае возникает вопрос о существовании вакуумных решений, являющихся D – бранами. В данной работе мы исследуем этот вопрос и показываем, что регулярные вакуумные бранные решения могут существовать в многомерных модифицированных теориях гравитации.

В настоящее время $D4$ – branes (так называемый brane world scenario) активно используются для решения некоторых проблем в физике высоких энергий (см., например, [33]-[34]). В этих моделях предполагается, что наша Вселенная является такого рода браной в некотором объемлющем пространстве, что, возможно, позволяет решить некоторые проблемы в физике высоких энергий: проблема иерархии фермионных масс [149, 150], природа темной энергии [151] и темной материи [152].

В ОТО имеется много решений, описывающих D - браны, (см., например обзор [153]). Насколько нам известно, для получения всех этих решений необходимо наличие материи. И это физически понятно, так как в ОТО регулярные решения практически всегда (а может быть и всегда) могут быть получены при наличии некоторых источников. Такими примерами могут являться решения со скалярными [154], векторными и спинорными [155, 156] полями. Естественный вопрос, возникающий в этой связи, это вопрос о наличии или отсутствии вакуумных регулярных бранных решений. В [157] было показано, что в 5-мерном пространстве может существовать 4-мерная брана, являющаяся регулярным вакуумным решением. В этом исследовании мы даем положительный

ответ на вопрос о существовании таких бранных решений с коразмерностью = 1 в пространстве с произвольной размерностью, но при этом необходимо перейти от ОТО к модифицированным теориям гравитации.

Модифицированные теории гравитации являются одной из конкурирующих моделей для объяснения современного ускоренного расширения Вселенной, открытого в недавнее время [158, 159]. Эти теории являются, по-видимому, простейшим геометрическим обобщением общей теории относительности (см. обзор [160]). Они основаны на замене лагранжиана Эйнштейна-Гильберта R на произвольную функцию от скалярной кривизны $f(R)$. С математической точки зрения, полевые уравнения, получаемые варьированием модифицированного действия по метрике, имеют более богатую структуру возможных решений, что и позволяет применять их для получения новых физических результатов.

В данном исследовании мы хотим показать, что D -branes с коразмерностью $\text{codim} = 1$ можно получить как регулярные вакуумные решения в модифицированных теориях гравитации. Это означает, что для построения таких D -branes присутствие материи не обязательно.

4.3.1 Уравнения и общие свойства в $f(R) \sim R^n$ теории

Рассмотрим D -branes with $\text{codim} = 1$ в N -мерном пространстве-времени с размерностью N . Соответствующее гравитационное действие может быть представлено в следующей форме

$$S = \int d^N x \sqrt{-G} [-R + f(R)], \quad (4.50)$$

где $f(R)$ – произвольная функция скалярной кривизны R ; G_{AB} – N -мерная метрика.

Вариация действия (4.50) относительно N -мерной метрики G_{AB} приводит к уравнениям модифицированной гравитации

$$R_A^B - \frac{1}{2} \delta_A^B R = \hat{T}_A^B, \quad (4.51)$$

где заглавные латинские буквы $A, B = 0, 1, \dots, N - 2, N$; правая часть определяется следующим образом:

$$\hat{T}_A^B = - \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) R_A^B - \frac{1}{2} \delta_A^B f + (\delta_A^B g^{LM} - \delta_A^L g^{BM}) \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right)_{;L;M} \right\}. \quad (4.52)$$

Мы рассматриваем следующий специальный выбор модифицированной гравитации

$$f(R) = -\alpha R^n, \quad (4.53)$$

где $\alpha > 0$ и n константы. В этой главе мы ищем D -branes с $\text{codim} = 1$ в N -мерном пространстве, поэтому метрика имеет вид

$$ds^2 = e^{2\beta(x^N)}[(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^{N-1})^2] - (dx^N)^2. \quad (4.54)$$

Метрика (5) имеет следующие компоненты тензора Риччи:

$$R_{00} = e^{2\beta}\beta'' + N\beta'^2\varepsilon^{2\beta}, \quad (4.55)$$

$$R_{AA} = -e^{2\beta}(\beta'' + N\beta'^2), \quad A = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.56)$$

$$R_{NN} = -N(\beta'' + \beta'^2). \quad (4.57)$$

Здесь ' означает производную по x^N координате. Уравнение (4.51) имеет структуру, которая совпадает со стандартными уравнениями общей теории относительности, где источником гравитационного поля является эффективный тензор энергии-импульса (4.52).

После подстановки метрики (4.54) и компонент тензора Риччи (4.55) - (4.57) в уравнения модифицированной гравитации (4.51), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (1-N)\beta'' + \frac{N(1-N)}{2}\beta'^2 &= -(\beta'' + N\beta'^2)f_R + \frac{1}{2}f + \\ &[4N^2\beta'\beta''' + 2N(N^2-1)\beta'^2\beta'' + 2N\beta + 2N(N+1)\beta''^2]f_{RR} + \\ &[4N^2\beta'''^2 + 8N^2(N+1)\beta'\beta''\beta''' + 4N^2(N+1)^2\beta'^2\beta''^2]f_{RRR} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\frac{N(1-N)}{2}\beta'^2 = -N(\beta'' + \beta'^2)f_R + \frac{1}{2}f + 2N^2\beta'[\beta''' + (N+1)\beta'\beta'']f_{RR}. \quad (4.59)$$

Здесь мы использовали следующие обозначения: $f_R = dF(R)/dR$, $f_{RR} = d^2F(R)/dR^2$ и $f_{RRR} = d^3F(R)/dR^3$. Примем также во внимание, что скаляр Риччи имеет вид:

$$R = 2N\beta'' + N(N+1)\beta'^2. \quad (4.60)$$

Рассмотрим уравнение (4.59), так как, согласно тождеству Бьянки, уравнение (4.58) является следствием уравнения (4.59). Поделив всё уравнение (4.59) на коэффициенты при β''' , получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \beta''' - \frac{1}{n}\frac{\beta''^2}{\beta'} + \frac{(N-1)(1+N-2n)}{4n(n-1)}\beta'^3 + \frac{2(N+1)(n^2+1)-n(3N+5)}{2n(n-1)}\beta'\beta'' - \\ \frac{N-1}{4\alpha Nn(n-1)}[N(N+1)\beta'^2 + 2N\beta'']^{2-n}\beta' = 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Решение в начале координат, совмещенном с центром D –brane, ищем в виде

$$\beta(x^N) = \beta_0 + \gamma(x^N)^\delta + \dots \quad (4.62)$$

Без ограничения общности мы можем положить $\beta_0 = 0$, что соответствует переопределению координат $e^{\beta_0} x^A \rightarrow x^A$, $A = 1, 2, \dots$

Поскольку в уравнении (4.61) имеется третья производная по x^N , то для того чтобы это слагаемое было конечным, необходимо положить $\delta > 3$. Лидирующими слагаемыми в этом уравнении являются слагаемые с β''' и $\frac{\beta''^2}{\beta'}$. Тогда, подставляя разложение (4.62) в (4.61) и приравнявая к нулю коэффициент при $(x^N)^{\delta-3}$, получаем следующее выражение для параметра δ :

$$\delta = \frac{2n-1}{n-1}. \quad (4.63)$$

В результате имеем интересный результат: связь между параметрами δ и n не зависит от размерности объемлющего пространства. С учетом того, что $\delta > 3$, мы получаем следующее неравенство для n :

$$n < 2. \quad (4.64)$$

Асимптотическое поведение описывается в виде

$$\beta \approx k|x^N|, \quad (4.65)$$

и после подстановки в (4.61) получаем

$$k = \left\{ \frac{[N(N+1)]^{2-n}}{\alpha N(N-2n+1)} \right\}^{\frac{1}{2(n-1)}}. \quad (4.66)$$

4.3.2 Численные результаты расчетов

По всей видимости получение аналитического решения уравнения (4.61) с ограничениями (4.62) и (4.63), описывающего thick D -brane с $\text{codim} = 1$, невозможно. Численное исследование этого уравнения для произвольной размерности также невозможно; поэтому мы выполним численное исследование для некоторых размерностей.

Очевидно, что решения с четными значениями параметра $\delta = 2p$ (где p – целое число) являются четными функциями относительно переменной x^N . Независимыми параметрами для уравнения (4.61), определяющими решение, являются размерность пространства N , показатель степени n и величина γ , определяющая значение функции β в центре браны.

Намного более сложные решения существуют при произвольном значении

показателя степени n :

- Численный анализ показал, что при показателе степени $n = (2p + 1)/(2q + 1)$, где p, q – целые числа, регулярное решение существует при $x^N > 0$, а при $x^N < 0$ решение становится сингулярным. Наш анализ показал, что в этом случае могут существовать регулярные решения при $\gamma < 0$. В таком случае можно получить регулярную брану, сшивая эти регулярные решения при $x^N = 0$. Это возможно сделать, так как при нашем выборе показателя степени δ значение функции $\beta(0)$, а также ее первая и вторая производные в центре браны равны нулю: $\beta(0) = \beta'(0) = \beta''(0) = 0$.

- Намного более сложной задачей является построение решений для иррациональных чисел δ . Дело в том, что при $x^N < 0$ вблизи начала координат может возникнуть ситуация, когда необходимо будет вычислить степень некоторого отрицательного числа. Выделяя знак минус перед таким числом, возникает проблема вычисления числа $(-1)^\delta$ для иррационального числа δ . Как известно $(-1)^\delta = \exp(i\pi\delta) = \cos(\pi\delta) + i\sin(\pi\delta)$, m – целое число. В общем случае это число становится комплексным, и в этом случае решения, по всей видимости, не существуют.

Исследуемые нами решения зависят от следующих параметров: показатель степени δ и константа γ в выражении (4.62) для поведения функции $\beta(x^N)$ вблизи начала координат $x^N = 0$; константы α и n из выражения (4.53) для вида модифицированной теории гравитации, причем α является некоторым параметром, выражающимся через новую фундаментальную длину в модифицированных гравитациях этого вида, а n определяет тип модифицированной гравитации,

На рисунке 4.16 показана зависимость метрической функции $\beta'(x^N)$ от показателя степени δ в выражении (4.62). На рисунке 4.17 – фазовый портрет уравнения (4.61), то есть зависимость $\beta'(\beta)$. На рисунке 4.18 показана зависимость плотности энергии от координаты x^N . Рисунки 4.16 и 4.17 демонстрируют асимптотическое AdS поведение метрической функции $\beta : \beta'(x^N \rightarrow \infty) \rightarrow k$, где константа k определяется выражением (4.66).

На рисунках 4.19 - 4.21 представлены, соответственно, метрическая функция $\beta(x^N)$, фазовый портрет $\beta''(\beta')$ и плотность энергии T_0^0 при различных γ .

На рисунках 4.22 – 4.24 представлены, соответственно, метрическая функция $\beta(x^N)$, фазовый портрет $\beta''(\beta')$ и плотность энергии T_0^0 при различных α .

На рисунках 4.25 – 4.27 представлены, соответственно, метрическая функция $\beta(x^N)$, фазовый портрет $\beta''(\beta')$ и плотность энергии T_0^0 при различных N .

Анализируя эти результаты, можно сделать следующие выводы:

- При увеличении параметра α происходит насыщение: все кривые стремятся к некоторому пределу. Этот результат легко объясним: дело в том, что из уравнения (4.61) видно, что последнее слагаемое в этом уравнении стремится к

нулю при увеличении α , что и приводит к уравнению

$$\beta''' - \frac{1}{n} \frac{\beta''^2}{\beta'} + \frac{(N-1)(1+N-2n)}{4n(n-1)} \beta'^3 + \frac{2(N+1)(n^2+1)-n(3N+5)}{2n(n-1)} \beta' \beta'' = 0, \quad (4.67)$$

не содержащему параметр α . Это уравнение дает решение, к которому стремятся решения уравнения (4.61) при увеличении α .

- С ростом величины параметра n также имеется насыщение: все кривые стремятся к некоторому пределу. Это можно объяснить аналогичным образом: при стремлении $n \rightarrow \infty$ уравнение (4.61) приобретает следующий простой вид

$$\beta''' + (N+1)\beta' \beta'' = 0, \quad (4.68)$$

решение которого есть

$$\beta = c_3 + \frac{2 \operatorname{Incosh} \sqrt{c_1 \frac{N+1}{2}} (x^{N+c_2})}{N+1}, \quad (4.69)$$

и оно является приближенным решением уравнения (12) при больших n .

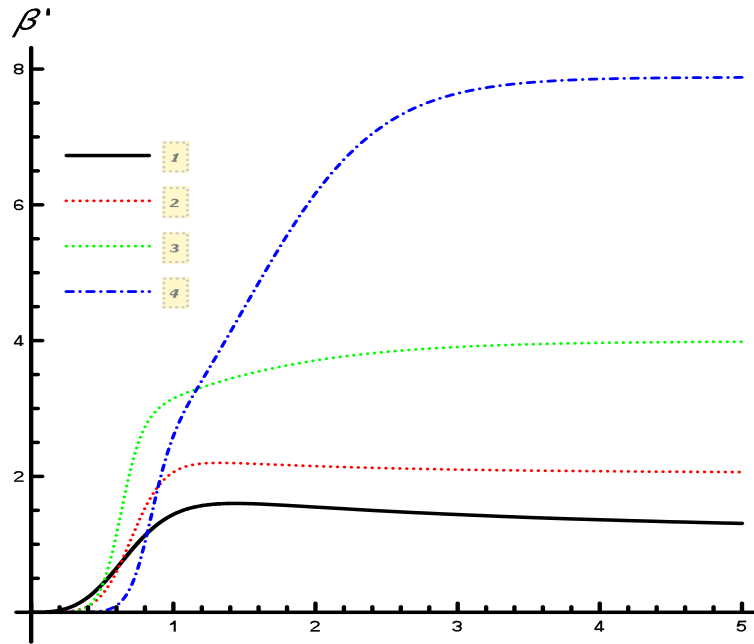


Рисунок 4.16 - Поведение функции $\beta'(x)$ в зависимости от различных значений параметра δ . Для кривых 1, 2, 3, 4 соответственно $\delta = 4, 6, 8, 10$. Это соответствует показателю степени n в модифицированной теории гравитации $f(R) = -\alpha R^n$: $n = 3/2, 5/4, 7/6, 9/8$. $N = 3, \alpha = 1, \gamma = 1$.

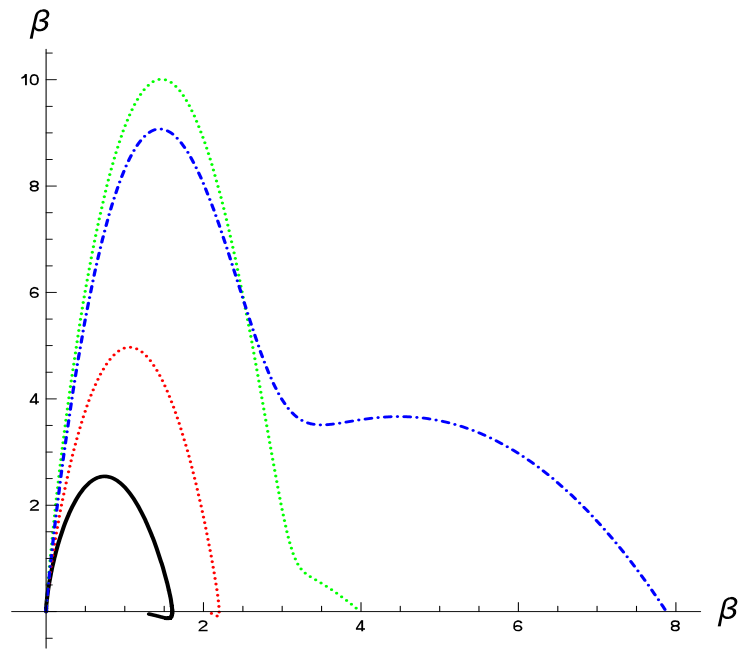


Рисунок 4.17 - Фазовый портрет в зависимости от различных значений параметра δ . Для кривых 1, 2, 3, 4 соответственно $\delta = 4, 6, 8, 1$. Это соответствует показателю степени n в модифицированной теории гравитации $f(R) = -\alpha R^n$: $n = 3/2, 5/4, 7/6, 9/8$. $N = 3, \alpha = 1, \gamma = 1$.

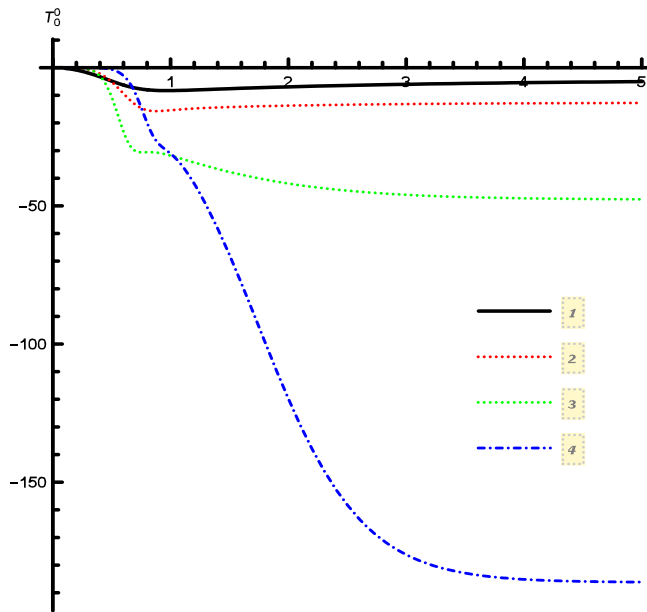


Рисунок 4.18 - Эффективная плотность энергии T_0^0 в зависимости от различных значений параметра δ . Для кривых 1, 2, 3, 4 соответственно $\delta = 4, 6, 8, 10$. Это соответствует показателю степени n в модифицированной теории гравитации $f(R) = -\alpha R^n$: $n = 3/2, 5/4, 7/6, 9/8$. $N = 3, \alpha = 1, \gamma = 1$.

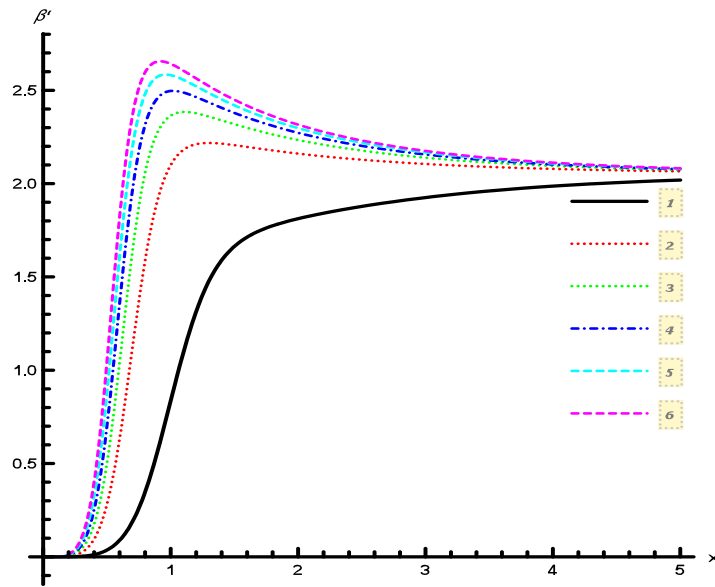


Рисунок 4.19 - Поведение функции $\beta'(x)$ в зависимости от различных значений параметра γ . Для кривых 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно $\gamma = 0.1, 1.08, 2.06, 3.04, 4.02, 5.0$. $N = 3, \delta = 6, n = 5/4, \alpha = 1$.

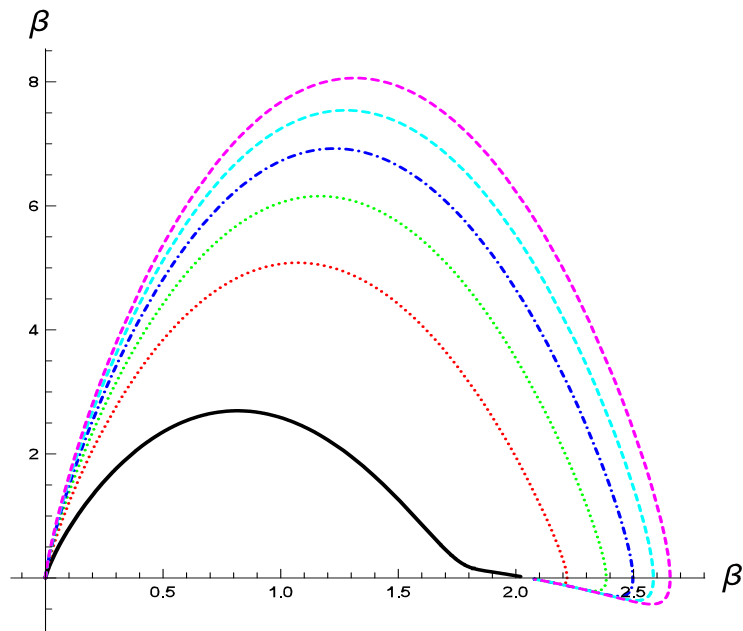


Рисунок 4.20 - Фазовый портрет в зависимости от различных значений параметра γ . Для кривых 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно $\gamma = 0.1, 1.08, 2.06, 3.04, 4.02, 5.0$. $N = 3, \delta = 6, n = 5/4, \alpha = 1$.

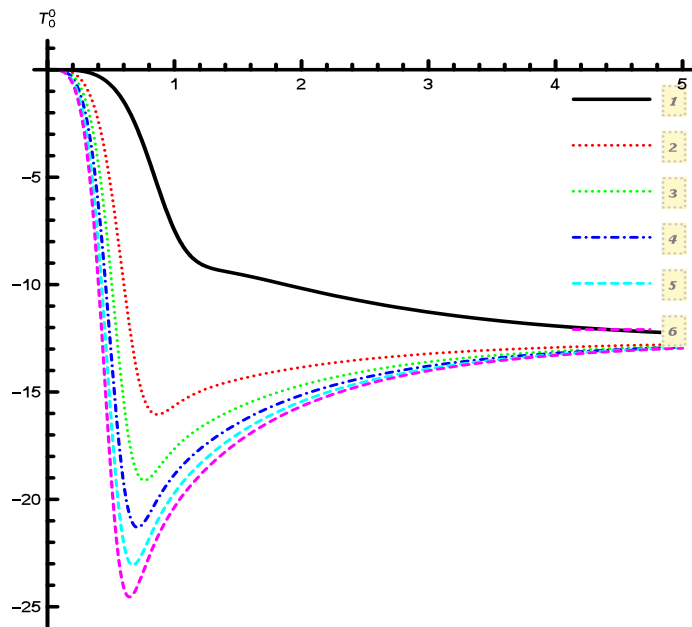


Рисунок 4.21 - Эффективная плотность энергии в зависимости от различных значений параметра γ . Для кривых 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно $\gamma = 0.1, 1.08, 2.06, 3.04, 4.02, 5.0$. $N = 3, \delta = 6, n = 5/4, \alpha = 1$.



Рисунок 4.22 - Поведение функции $\beta'(x)$ в зависимости от различных значений параметра α . Для кривых 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно $\alpha = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0$. $N = 3, \delta = 6, n = 5/4, \gamma = 1.0$.



Рисунок 4.23 - Фазовый портрет в зависимости от различных значений параметра α . Для кривых 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно $\alpha = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0$.
 $N = 3, \delta = 6, n = 5/4, \gamma = 1.0$.

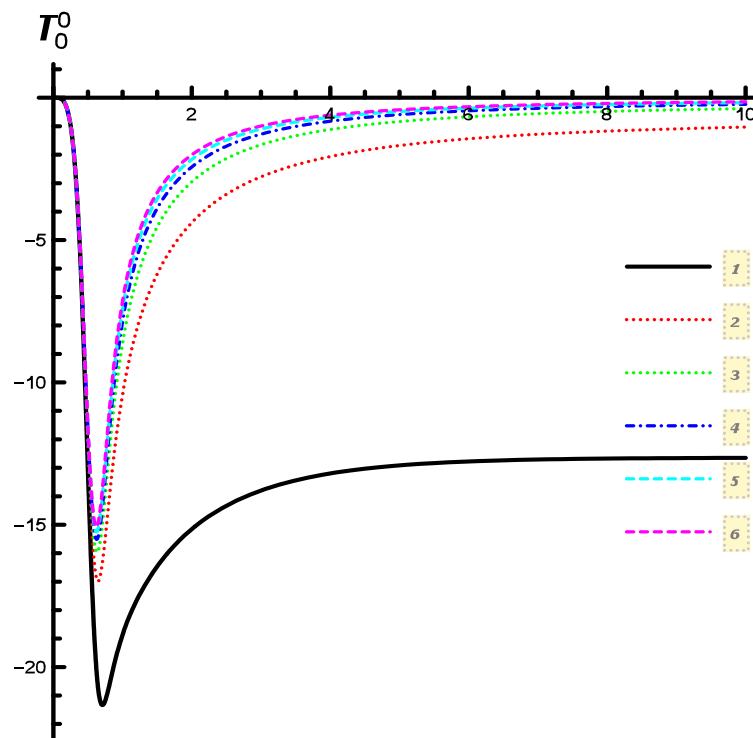


Рисунок 4.24 - Эффективная плотность энергии в зависимости от различных значений параметра α . Для кривых 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно $\alpha = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0$. $N = 3, \delta = 6, n = 5/4, \gamma = 1.0$

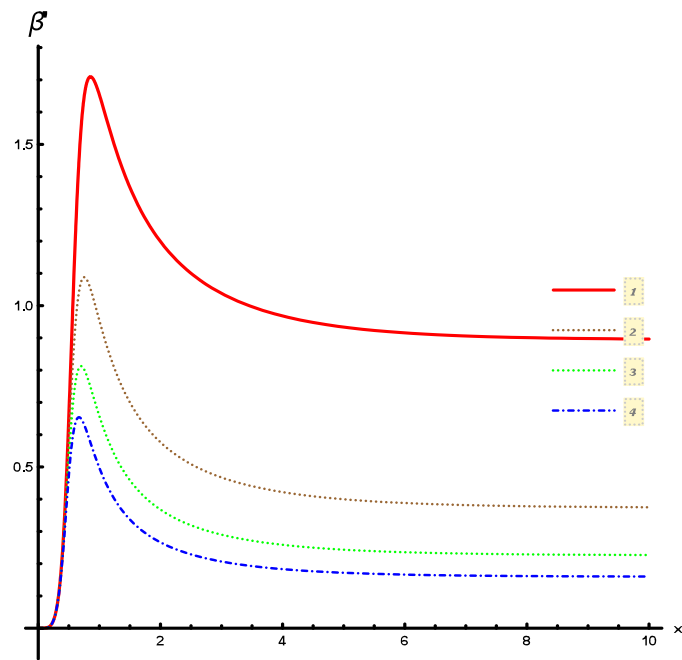


Рисунок 4.25 - Поведение функции $\beta'(x)$ в зависимости от различных значений размерности пространства $N = 4, 6, 8, 10$. $N = 3$, $\delta = 6$, $n = 5/4$, $\gamma = 1.0$, $\alpha = 1$.

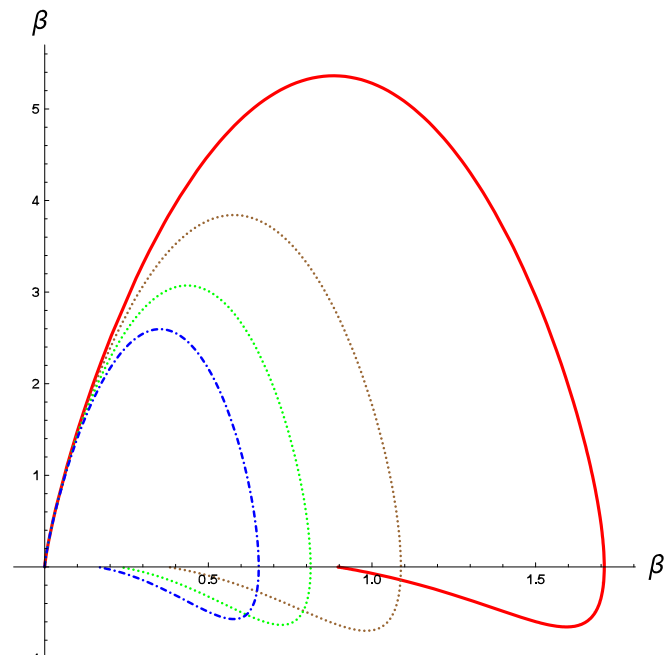


Рисунок 4.26 - Фазовый портрет в зависимости от различных значений размерности пространства $N = 4, 6, 8, 10$. $N = 3$, $\delta = 6$, $n = 5/4$, $\gamma = 1.0$, $\alpha = 1$.

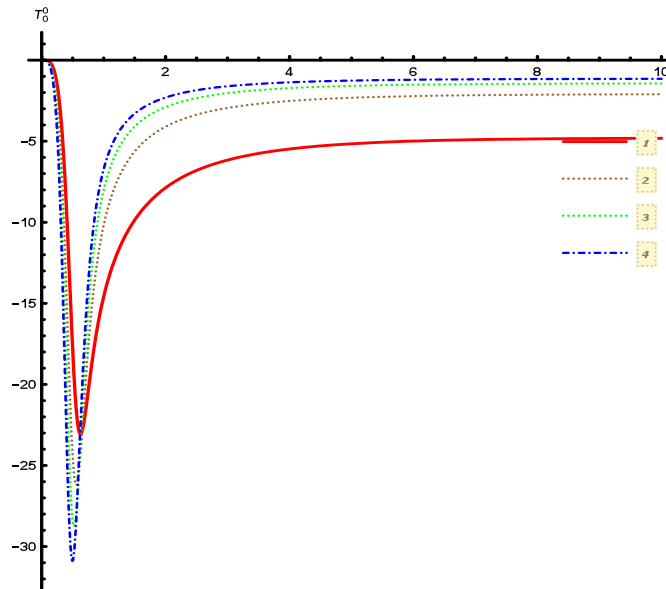


Рисунок 4.27 – Эффективная плотность энергии T_0^0 в зависимости от различных значений размерности пространства $N = 4, 6, 8, 10$. $N = 3$, $\delta = 6$, $n = 5/4$, $\gamma = 1.0$, $\alpha = 1$.

В данной главе диссертации получены регулярные четные плоско-симметричные решения в многомерных модифицированных теориях гравитации типа $f(R) = -\alpha R^n$. С физической точки зрения эти решения представляют собой thick branes с коразмерностью 1.

Свойства этих бран зависят от четырех величин: параметров γ и δ , описывающих свойства решения около начала координат, и параметров α и n , описывающих тип модифицированной теории гравитации. Для анализа полученных решений были найдены семейства решений при фиксированных значениях трех параметров и меняющемся значении оставшегося четвертого параметра.

В результате показаны, что:

- 1) Все регулярные решения имеют AdS асимптотику.
- 2) При увеличении параметров $\alpha, n \rightarrow \infty$ решения стремятся к некоторому пределу, уже не зависящему от значений этих параметров.
- 3) Не при всех значениях параметра n существуют решения:
 - если $n = (2p + 1)/(2q + 1)$, где p, q – целые числа, то решение регулярно при $x^N > 0$ и может быть сингулярным при $x^N < 0$;
 - если показатель степени n является иррациональным числом, то решений в общем случае не существует.

4) Согласно уравнению (4.51) его правая часть играет роль эффективного тензора энергии-импульса $\hat{T}_{\mu\nu}$. Было показано, что в этом случае эффективная плотность энергии T_0^0 является отрицательной и исследовали ее зависимость от значений параметров $\gamma, \delta, \alpha, N$.

Полученные результаты опубликованы в следующих работах [168, 170].

Заключение

В диссертационной работе представлены исследования, проводимые в рамках 4-х и многомерных модифицированных теориях гравитации, в которых найдены различные типы регулярных решений для доменных стенок, thick branes; а также был проведен качественный анализ полученных решений.

Основными результатами данной работы являются следующие:

- Рассмотрен класс модифицированных теорий гравитаций, которые расширяют общую теорию относительности, сохраняя ее положительные черты. В них гравитационное действие Эйнштейна - Гильберта модифицируется, путем добавления произвольной функции от скалярной кривизны Риччи $R - f(R)$.

- Рассматриваются теории гравитации в пространствах с размерностью выше четырех и т.д. Наибольшее внимание из них привлекает $f(R)$ – гравитация в силу того, что она выглядит проще других модифицированных теорий гравитаций, а также может быть переписана в виде скалярно-тензорной теории.

- Исследованы 4-мерные доменные стенки, 5-ти и 6-мерные thick branes в $-\alpha R^n$ гравитации. Получены регулярные, плоско-симметричные решения в вакууме при определенных значениях параметра n и δ . Полученные решения представляют большой интерес, так как являются вакуумными решениями, в отличие от аналогичных решений в общей теории относительности. В результате:

1) Все регулярные решения имеют AdS асимптотику.

2) При увеличении параметров α , $n \rightarrow \infty$ решения стремятся к некоторому пределу, уже не зависящему от значений этих параметров.

3) Не при всех значениях параметра n существуют решения:

- если $n = (2p + 1)/(2q + 1)$, где p, q – целые числа, то решение регулярно при $x^N > 0$ и может быть сингулярным при $x^N < 0$;

- если показатель степени n является иррациональным числом, то решений в общем случае не существует.

4) Согласно уравнению $R_A^B - \frac{1}{2}\delta_A^B R = \hat{T}_A^B$, правая часть играет роль эффективного тензора энергии-импульса $\hat{T}_{\mu\nu}$. Было показано, что в этом случае эффективная плотность энергии T_0^0 является отрицательной и исследована ее зависимость от значений параметров $\gamma, \delta, \alpha, N$.

- Получены фазовые портреты для 4-х мерной доменной стенки, 5 и 6 - мерной модели браны, а также график масштабных факторов. Полученные решения thick branes и доменных стенок могут стать интересной моделью для космологических исследований. Полученные результаты опубликованы в следующих работах [162 - 170].

- Показано что регулярные решения, имеют особую точку, расположенную в центре браны. Как следует из аналитического анализа поведения решений в окрестности этой точки, такая точка существует только при определенных значениях параметра n т.е. $1 < n < 2$. В этом случае первые три производные метрической функции у равны 0, что позволяет поместить брану непосредственно

на особой точке $z = z_{fp}$.

- Показано что существование особой точки обеспечивает наличие плоскосимметричных решений, зависящих от значений параметров n .

- Показано, что D -branes с коразмерностью $\text{codim} = 1$ можно получить как регулярные вакуумные решения в модифицированных теориях гравитации. Это означает, что для построения таких D -branes присутствие материи не обязательно.

Поставленные в диссертации задачи полностью решены: Получены дифференциальные уравнения, описывающие доменную стенку, thick branes и D – branes в 4-х и многомерных модифицированных теориях гравитации. Для этих уравнений получены соответствующие численные решения. Исследованы свойства: а) особой точки, находящейся в центре этих объектов; б) полученных решений.

Рекомендации. Полученные в диссертационной работе результаты представляют ценность для развития теории гравитации и астрофизики. На основе полученных результатов будут описаны свойства таких протяженных объектов как: доменные стенки, thick branes и D – branes. Разработанные методы численного решения для модифицированной теории гравитации позволяют определить свойства этих астрофизических объектов. Также полученные результаты можно использовать для решения проблемы иерархий, компактификации дополнительных измерений и объяснения некоторых космологических проблем.

Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области. Для получения всех протяженных астрофизических объектов, полученных в данной диссертации применялись модифицированные теории гравитации без использования обычной материи. Основным преимуществом этих моделей является то, что соответствующие решения являются вакуумными в отличие от полученных ранее решений, основанных на использовании материи.

Преимущество модифицированных теорий гравитации над ОТО заключается в том, что они предоставляют больше свободы в поиске решения, а значит, дают возможность построить космологические модели, лишённые некоторых недостатков ОТО.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Einstein A. Notiz zu der Arbeit von A. Friedmann “Über die Krümmung des Raumes” (нем.) // Zeitschrift für Physik: magazin. – 1923. – Bd.16. – Nr.1. – S.228.
- 2 Рубаков В.А., Шапошников М.Е. // Phys.Lett. B. – 1983. – Vol.125. – P.136.
- 3 Kaluza. T. Zum Unitätsproblem in der Physik. // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. – Berlin. – 1921. – P. 966 – 972.
- 4 Klein O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie // Zeitschrift für Physik. A. – 1926. – Vol. 37. (12). — P. 895 – 906.
- 5 Randall L., Sundrum R. A Large mass hierarchy from a small extra dimension // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 83. – P.3370.
- 6 Randall L., Sundrum R. An alternative to compactification // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 83. – P.4690.
- 7 Rubakov V.A. Large and infinite extra dimensions: an introduction // Phys. Usp. – 2001. – Vol. 44. – P.871.
- 8 Barvinsky A.O. Cosmological Branes and Macroscopic Extra Dimensions // Phys. Usp. – 2005. – Vol.48. – P.545 // Usp. Fiz. Nauk – 2005. – Vol.175. – P.569.
- 9 Kibble T.W.B. Some implications of a cosmological phase transition // Physics Reports. – 1980. – Vol. 67. – P. 183 – 189.
- 10 Coleman S. The uses of instantons // The Whys of Subnuclear Physics: proceedings of the 1977 International School of Subnuclear Physics. – New York: Plenum Press, 1977. – P. 805 – 916.
- 11 Vilenkin A. Creation of universes from nothing // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 117. – P. 25 – 28.
- 12 Vilenkin A. Birth of inflationary universes // Phys. Rev. D. – 1983. – Vol. 27. – P. 2848 – 2855.
- 13 Hartle J. B. and Hawking S. W. Wave function of the Universe // Phys. Rev. D. – 1983. – Vol. 28. – P. 2960 – 2975.
- 14 Vilenkin A. Quantum creation of universes // Phys. Rev. D. – 1984. – Vol. 30. – P. 509 – 511.
- 15 Linde A. D. Quantum creation of the inflationary universe // Lett. Nuovo Cimento. – 1984. – Vol. 39. – P. 401 – 405.
- 16 Gibbons G. W., Hartle J. B. Real tunneling geometries and the large scale topology of the universe // Phys. Rev. D. – 1990. – Vol. 42 – P. 2458 – 2468.
- 17 Vilenkin A. Gravitational field of vacuum domain walls and strings // Phys. Rev. D. – 1981 – Vol. 23. – P. 852 – 857.
- 18 Dolgov A. D., Khriplovich I. B. Does a static solution exist for a gravitating planar wall? // Gen. Relativ. Gravit. – 1989. – Vol. 21. – P. 13 – 16.
- 19 Vilenkin A. Gravitational field of vacuum domain walls // Phys. Lett. B. – 1983. – Vol. 133. – P. 177 – 179.
- 20 Iperser J. R., Sikivie P. Gravitationally repulsive domain wall // Phys. Rev. D. – 1984. – Vol. 30. – P. 712 – 719.

- 21 Ipser J. R. Repulsive and attractive planar walls in general relativity // *Phys. Rev. D.* – 1984. – Vol. 30. – P. 2452 – 2456.
- 22 Dzhunushaliev V., Folomeev V. and M. Minamitsuji. Thick brane solutions *Rept. Prog.Phys.* – 2010. Vol. 73. – P. 066901.
- 23 Sakharov A.D. Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation // *Sov. Phys. Dokl.* – 12. – 1968. – P. –1040 // *Dokl. Akad. Nauk. – Ser. Fiz.* – 1967. – Vol.177. – P. 70.
- 24 Ruzmaikina T.V., Ruzmaikin A.A. Quadratic corrections to the Lagrangian density of the gravitational field and the singularity // *JETP.* – 1970. – Vol. 30. – N. 2. – P. – 372.
- 25 Gurovich V.T. The nonlinear correction in the Lagrangian density of the gravitational field and cosmological solutions with no singularity // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* – 195. – 1970. – 1300 // *Sov. Phys. Dokl.* – 1971. – Vol.15. – P.1105.
- 26 Nariai H. On the removal of initial singularity in a Big-Bang Universe in terms of a renormalized theory of gravitation. Examination of the present status and a new approach // *Prog. Theor. Phys.* – 1971. – Vol.46. – P.433.
- 27 Gurovich V.T., Starobinsky A.A. Quantum effects and regular cosmological models // *Sov. Phys. JETP.* – 1979. – Vol.50. – P.844.
- 28 Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity // *Phys. Lett.* – 1980. – Vol. 91. – P. 99 -102.
- 29 Nojiri S., Odintsov S.D., Tretyakov P.V. Dark energy from modified $f(R)$ -scalar-Gauss-Bonnet gravity // *Phys. Lett.* – 2007. – Vol. 651 – P. 224.
- 30 Nojiri S., Odintsov S.D. Brane-world cosmology in higher derivative gravity or warped compactification in the next-to-leading order of AdS/CFT correspondence // *JHEP.* – 2000. – Vol.07. – P.049.
- 31 Polchinski J. Dirichlet branes and Ramond – Ramond Charges // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. – Vol. 75, – P.4724 – 4727.
- 32 Horowitz G. T., Strominger A. Black strings and p – branes // *Nucl. Phys. B.* – 1991. – Vol.360. – P.197–209.
- 33 Arkani-Hamed N., Dimopoulos S. and Dvali G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // *Phys. Lett. B.* – 1998. – Vol. 429. – P. 263 – 272; Antoniadis I., Arkani-Hamed N., Dimopoulos S. and Dvali G. New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a TeV // *Phys. Lett. B.* – 1998. – Vol.436. – P. 257 – 263.
- 34 Gogberashvili M. Hierarchy problem in the shell – Universe model // *Int. J. Mod. Phys. D.* - 2002. – Vol.11. – P.1635-1638; Gogberashvili M. Our works as an expanding shell // *Europhys. Lett.* – 2000. – Vol. 49. – P. 396 – 399;
- 35 Dzhunushaliev V., Folomeev V., Kleihaus B., Jutta Kunz. Some thick brane solutions in $f(R)$ gravity // *JHEP.* – 2010. – Vol.1004. – P.130. [arXiv:0912.2812].
- 36 Blinnikov S.I., Postnov K.A. A mini-supernova model for optical afterglows of gamma-ray bursts // *MNRAS.* – 1998. – Vol.293. – P.L29.

- 37 Nielsen J. T., Guffanti A., Sarkar S. Marginal evidence for cosmic acceleration from Type Ia supernovae // *Scientific Reports*. – 2016. – Vol. 6. – P.35596.
- 38 Riess A., Lucas M. Macri, Samantha L. H. A 2.4% Determination of the local value of the Hubble constant // *The Astrophysical Journal*. – 2016. –Vol. 826:56. – P.31.
- 39 Planck Collaboration. Planck results XVI. - 2013. Cosmological parameters. — *A&A*. – 2014. – Vol. 571.
- 40 Buchdahl, H. A. Non-linear Lagrangians and cosmological theory // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1970. – Vol.150
- 41 Allemandi G., Borowiec A. and Francaviglia M. Accelerated cosmological models in first-order non-linear gravity // *Phys. Rev.* – 2004. – D 70. – P.043524.
- 42 Carroll S. M., Duvvuri V., Trodden M. and Turner M.S. Is cosmic speed-up due to new gravitational physics // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – D 70. – P. 043528.
- 43 Starobinsky A. A. The Perturbation Spectrum Evolving from a Nonsingular Initially De-Sitter Cosmology and the Microwave Background Anisotropy // *Sov. Astron. Lett.* – 1983. – Vol.9. – P.302.
- 44 Gurovich V.T., Starobinsky A.A. Quantum effects and regular cosmological models // *Sov. Phys. JETP*. – 1979. – Vol.50. – P.844.
- 45 Carroll S. M., Duvvuri V., Trodden M. and Turner M.S. The cosmology of generalized modified gravity models // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – D 71. – P.063513.
- 46 Vollick D. N. $1/R$ curvature corrections as the source of the cosmological acceleration // *Phys. Rev.* – 2003. – D 68. – P.063510.
- 47 Harko T., Lobo F.S.N., Nojiri S., Odintsov S. $F(R, T)$ – gravity // *Physical Review D*. – 2011. – Vol 84 (2). – P.024020.
- 48 Myrzakulov R. Dark Energy in $F(R,T)$ Gravity // *physics.gen-ph* – 2012.
- 49 Nagpal R., Singh J. K., Beesham A., Shabani H. Cosmological aspects of a hyperbolic solution in $f(R,T)$ gravity // *Annals of Physics*. – 2019. – Vol. 405. – P.234-255.
- 50 Moraes P.H.R.S., Sahoo P.K. Wormholes in exponential $f(R,T)$ gravity // *The European Physical Journal C*. – 2019. – Vol. 79. – Article number: 677.
- 51 Islam S., Basu S. Magnetic field of a compact spherical star under $f(R,T)$ Gravity // *Chinese Physical Society and IOP Publishing Ltd Chinese Physics Letters*. – 2018. – Vol.35, N. 9 [arXiv:1812.02568]
- 52 Elizalde E., Khurshudyan M. On wormhole formation in $f(R,T)$ gravity: varying Chaplygin gas and barotropic fluid // *Physical Review D*. – 2018. – Vol.98. – Iss. 12 – 15. – P. 123525.
- 53 Tretyakov P. Cosmology in modified $f(R,T)$ – gravity // *The European Physical Journal C*. – 2018. – Vol. 78. – Article number: 896.
- 54 Nojiri S., Odintsov S.D. Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy // *ECONF* – 2006. – C 0602061 // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. – 2007. – Vol. 04. – No. 01. P.115 – 145.
- 55 Woodard R.P. Avoiding Dark Energy with $1/R$ Modifications of Gravity // *Lect.*

Notes Phys. – 2007. – Vol. 720. P.403 – 433.

56 Yu-Xiao Liu. Introduction to extra dimensions and thick braneworlds // High Energy Physics – Theory. – 2017.[arXiv:1707.08541]

57 Parry M., Pichler S., Deeg D. Higher – derivative gravity in brane world models // JCAP 0504. – 2005. – Vol 014. [hep-ph/0502048]

58 Afonso V., Bazeia D., Menezes R., Petrov A.Y. $f(R)$ -brane // Phys. Lett. B. – 2007. – Vol.658. – P.71–76. [arXiv: 0710.3790]

59 Yu-Xiao Liu, Y.Zhong, Z.-H. Zhao and H.-T.Li. Domain wall brane in squared curvature gravity // JHEP. – 2011. Vol.1106. – P.135.[arXiv: 1104.3188].

60 Koivisto T. A note on covariant conservation of energy-momentum in modified gravities // Class.Quant. Grav. – 2006. – Vol.23. – P.4289 – 4296.

61 Y.Zhong, Yu-Xiao Liu. Pure geometric thick $f(R)$ – brane: stability and localization of gravity // Eur.Phys. J. C. – 2016. – Vol.76. – P.321.

62 Liu H., Lu H. and Wang Z.-L. $f(R)$ – Gravities, Killing spinor equations, “BPS” Domain walls and cosmology // JHEP. – 2012. – Vol.1202 . – P.083.

63 Zhong Y., Yu-Xiao Liu., Yang K. Tensor perturbations of $f(R)$ –brane. // Phys. Lett. B. – 2011. – Vol.699. – P. 398 – 402. [arXiv: 1010.3478]

64 Nojiri S., Odintsov S. D., Quantum de Sitter cosmology and phantom matter // Phys. Lett. B. – 2003. – Vol.562. – P.147 [arXiv:hep-th/0303117].

65 Carroll S. M., Duvvuri V., Trodden M. and Turner M. S. Is cosmic speed-up due to new gravitational physics? // Phys. Rev. D. – 2004. – Vol. 70. – P. 043528.

66 Capozziello S. Curvature Quintessence // Int. Journ. Mod. Phys. – 2002. – D 11. – P.483.

67 Capozziello S., Carloni S. and Troisi A. Quintessence without scalar fields // Recent Res. Devel. Astron. Astrophysics. – 2003. – Vol.1. – P.625.

68 Nojiri S., Odintsov S. D. Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: unification of the inflation and of the cosmic acceleration // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol.68. – P.123512. [arXiv:hep-th/0307288].

69 Capozziello S. Newtonian limit of Extended Theories of Gravity // General Relativity and Quantum Cosmology. – 2004. – [arXiv:gr-qc/0412088].

70 . Dominguez A., Barraco D. Newtonian limit of the singular $f(R)$ gravity in the Palatini formalism // Phys. Rev. D. – 2004. – Vol.70. – P.043505.

71 Allemandi G., Francaviglia M., Ruggiero M. and Tartaglia A. Post-Newtonian Parameters from Alternative Theories of Gravity. – 2005. – [arXiv:gr-qc/0506123].

72 Koivisto T. A note on covariant conservation of energy–momentum in modified gravities // Classical and Quantum Gravity. – 2006. – Vol. 23 – N.12.

73 Olmo G. Constraining $f(R)$ gravity in the Palatini formalism // Phys. Rev.D. – 2005. – Vol.72. – P.083505.

74 Navarro I., Acoleyen K. On the Newtonian limit of generalized modified gravity models // Phys. Rev. D. – 2005. – Vol. 622. - Issues 1–2. – P. 1-5.

75 Cembranos J. The Newtonian limit at intermediate energies. – 2005. – [arXiv:gr-qc/0507039].

- 76 Amarzguioui M., Elgaroy O., Mota D. F., Multamaki T. Cosmological constraints on $f(R)$ gravity theories within the Palatini approach // *Astronomy & Astrophysics*. – 2006. – Vol. 454. – Number 3. [arXiv:astro-ph/0510519].
- 77 Shao C., Cai R., Wang B. and Su R. An alternative explanation of the conflict between $1/R$ gravity and solar system tests // *Phys. Lett. B*. – 2006. – Vol. 633. – Issues 2–3. – P.164-166.
- 78 Capozziello S., Troisi A. Parametrized post-Newtonian limit of fourth order gravity inspired by scalar-tensor gravity // *Phys. Rev.D*. – 2005. – Vol.72. – P.0 044022.
- 79 Bronnikov K., Kononogov S., Melnikov V. Brane world corrections to Newton's Law // *General Relativity and Gravitation*. – 2006. – Vol. 38. – P.1215–1232.
- 80 Dolgov A.D., Kawasaki M. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? // *Phys. Lett.B*. – 2003. – Vol.573. – P.1–4.
- 81 Soussa M. E., Woodard R. P. Avoiding dark energy with $1/R$ modifications of Gravity // *Lecture Notes in Physics book series*. – 2004 – Vol. 720. – GRG 36. – P.855.
- 82 Nojiri S., Odintsov S. D. Dark Energy and Modified Gravities // *Mod. Phys. Lett. A*. – 2004. – Vol.19. – P. 627.
- 83 Chiba T. $1/R$ gravity and scalar-tensor gravity // *Phys. Lett.B*. – 2003. – Vol.575. – P.1–3.
- 84 Flanagan E.E. Palatini form of $1/R$ gravity // *Phys. Rev. Lett*. – 2004. – Vol.92. – P.071101.
- 85 Antoniadis I., Rizos J., Tamvakis K. Singularity-free cosmological solutions of the superstring effective action // *Nucl. Phys.B*. – 1994. – Vol. 415. – P. 497.
- 86 Kanti P., Rizos J., Tamvakis K. Singularity-free cosmological solutions in quadratic gravity // *Phys. Rev. D*. – 1999. – Vol.59. – P.083512.
- 87 Mavromatos N. E., J. Rizos String-inspired higher-curvature terms and the Randall-Sundrum scenario // *Phys. Rev. D*. – 2000. – Vol.62. – P.124004. – // *Int. J. Mod. Phys. A*. – 2003. – Vol.18. – P. 57.
- 88 Nojiri S., Odintsov S. D. Where new gravitational physics comes from: M-theory? // *Phys. Lett. B*. – 2003. – Vol 576. – P.5–11.
- 89 U. Gunther A., Zhuk V., Bezerra and Romero C. On wormhole throats in $f(R)$ gravity theory // *Class.Quant.Grav*. – 2005. – Vol.22. – P.3135.
- 90 Nojiri S., Odintsov S. D., Sasaki M. Gauss-Bonnet dark energy // *Phys. Rev. D*. – 2005. – Vol.71. – Issues 12–15. – P.123509.
- 91 Arefeva I. Nonlocal String Tachyon as a Model for Cosmological Dark Energy // astro-ph/0410443; Srivastava S. Cosmic evolution with early and late acceleration inspired by dual nature of the ricci scalar curvature // hep-th/0602116.
- 92 Nojiri S., Odintsov S. D. Final state and thermodynamics of a dark energy universe // *Phys. Rev. D*. – 2004. – Vol.70. – P.103522.
- 93 Carter B., Neupane I. Dynamical relaxation of dark energy: A solution to early inflation, late-time acceleration and the cosmological constant problem // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2006. – Vol. 2006.
- 94 Perivolaropoulos L. Accelerating Universe: Observational Status and Theoretical

Implications // arXiv:astro-ph/0601014.

95 Lazkoz R., Nesseris S. and Perivolaropoulos L. Exploring cosmological expansion parametrizations with the gold SnIa data set // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2005. – Vol. 2005.

96 Jassal H., Bagla J., Padmanabhan T. Understanding the origin of CMB constraints on dark energy // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2010. – Vol. 405. – Iss. 4. – P. 2639–2650.

97 Sami M., Toporensky A., Trejakov P., S. Tsujikawa. The fate of (phantom) dark energy universe with string curvature corrections // *Phys. Lett. B*. – 2005. – Vol. 619. – P.193.

98 Calcagni G., Tsujikawa S., Sami M. Dark energy and cosmological solutions in second-order string gravity // *Class. Quant. Grav.* – 2005. – Vol. 22. – P.3977.

99 Tsujikawa S., Brandenberger R., Finelli F. Construction of nonsingular cosmological solutions in string theories // *Phys. Rev. D*. – 2002. – Vol.66. – P.083513.

100 Nojiri S., Odintsov S. D. Gravity assisted dark energy dominance and cosmic acceleration // *Phys. Lett. B*. – 2004. – Vol. 599. – P.137.

101 Allemandi G., Borowiec A., Francaviglia M., Odintsov S. D. Dark Energy Dominance and Cosmic Acceleration in First Order Formalism // *Phys. Rev. D*. – 2005. – Vol. 72. – P.063505.

102 Capozziello S., Lambiase G., Schmidt H.-J. A comprehensive view of cosmological Dark Side // *Ann. Phys. Leipzig*. – 2000. – Vol.9. – P.39.

103 Mukohyama S., Randall L. A dynamical approach to the cosmological constant // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – Vol.92. – P.211302.

104 Dolgov A. D., Kawasaki M. Realistic cosmological model with dynamical cancellation of vacuum energy // arXiv:astro-ph/0307442.

105 Inagaki T., Nojiri S., Odintsov S. D. The one-loop effective action in ϕ^4 theory coupled non-linearly with the power of the curvature and the dynamical origin of the cosmological constant // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2005. – Vol. 0506. – P. 010.

106 Biswas T., Notari A. Can inflation solve the hierarchy problem? // *Phys. Rev. D*. – 2006. – Vol.74. – P.043508.

107 Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S. D. Late-time cosmology in a (phantom) scalar-tensor theory: Dark energy and the cosmic speed-up // *Phys. Rev. D*. – 2004. – Vol.70. – P.043539.

108 Nordstrom G. On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields // *Phys. Z.* – 1914. – Vol.15. – P.504 – 506.

109 Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. – М.: Атомиздат, 1980. – 296 с.

110 Birrell N.D., Davies P.C.W. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge et al., Cambridge Universit. – Press, 1982. – P.340.

111 Bronnikov K.A., Konoplich R.V., Rubin S.G. The diversity of universes created by pure gravity // *Class. Quantum Grav.* – 2007. – Vol.24. – P.1261.

- 112 Bronnikov K.A., Rubin S.G. Self-stabilization of extra dimensions // *Phys. Rev. D.* – 2006. – Vol.73. – P.124019.
- 113 Lerche W., Lust D., A. N. Schellekens. String Theory in Four Dimensions // *Nucl. Phys. B.* – 1987. – Vol.287. – P.477.
- 114 Kachru S., Kallosh R., Linde A., Trivedi S. P. de Sitter Vacua in String Theory // *Phys. Rev. D.* – 2003. – Vol. 68. – P.046005.
- 115 Akama K. An Early Proposal of "Brane World" // *Lect. Notes Phys.* – 1982. – Vol. – 176. – P.267.
- 116 Hoyle C.D. et al. Submillimeter Test of the Gravitational Inverse-Square Law: A Search for "Large" Extra Dimensions // *Phys. Rev.Lett.* – 2001. – Vol.86. – P.1418.
- 117 Gibbons G. W., Hawking S.W. Action integrals and partition functions in quantum gravity // *Phys. Rev. D.* – 1977. – Vol.15. – P.2752.
- 118 Israel W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // *Nuovo Cimento B.* – 1996. – Vol.44. – Issue 1. – P.1 – 14.
- 119 Horava P., Witten E. Heterotic and Type I string dynamics from eleven dimensions // *Nucl. Phys. B.* – 1996. – Vol. 460. – P.506 – 524.
- 120 Бронников К.А., Рубин С.Г. Лекции по гравитации и космологии: учебное пособие. – М.:МИФИ, 2008. – 320 – 395 с.
- 121 Gogberashvili M., Myrzakul Sh., Singleton D. Standing gravitational waves from domain walls // *Phys.Rev.D.* – 2009. –Vol.80, №16. – P.4040 – 4045.
- 122 Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.:Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. – 563 с.
- 123 Dzhunushaliev V., Folomeev V. 4D static solutions with interacting phantom fields // *Int. J. Mod. Phys. D.* – 2008. – Vol. 17, №11. – P. 2125 – 2142.
- 124 Dzhunushaliev V., Kim Sung-Won., Nurtayeva G.K., Protsenko N.A. and Idrissov A. Thick brane solutions in modified theories of gravity // *Recent Contributions to Physics [S.I.].* – 2018. – Vol. 66, n. 3. – P. 12 – 20.
- 125 Capozziello S. Curvature Quintessence // *Int. Journ. Mod. Phys.* – 2002. – D 11. – P.483.
- 126 Capozziello S., Carloni S. and Troisi A. Quintessence without scalar fields // *Recent Res. Devel. Astron. Astrophysics.* – 2003. – Vol .1. – P.625.
- 127 Folomeev V., Gurovich V. and Tokareva I. Geometric model of Quintessence // *Grav. Cosmol.* – 2006. – Vol.12. – P.163.
- 128 Nojiri S. and Odintsov S. Where new gravitational physics comes from: M-theory // *Phys. Lett.* – 2003. – Vol. 576. – P.5.
- 129 Nojiri S. and Odintsov S.D. The minimal curvature of the universe in modified gravity and conformal anomaly resolution of the instabilities // *Mod. Phys. Lett. A.* - 2004. – Vol.19. – P.627.
- 130 Nojiri S. and Odintsov S.D. Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: unification of the inflation and of the cosmic acceleration // *Phys.Rev. D.*– 2003. – Vol.68. – P.123512.
- 131 Capozziello S., Cardone V.F. and Troisi A. Dark energy and dark matter as

curvature effects // JCAP. – 2006. – Vol. 08. – P.001.

132 Nojiri S. and Odintsov S.D. Modified Gauss – Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy // Phys. Lett. B.– 2005. – Vol.631. – P.1.

133 Nojiri S., Odintsov S.D. and Sasaki M. Gauss – Bonnet dark energy // Phys. Rev. D – 2005. –Vol.71. – P.123509.

134 Nojiri S., Odintsov S.D. and Tretyakov P.V. Dark energy from modified $F(R)$ – scalar – Gauss-Bonnet gravity // Phys. Lett. – 2007. – B 651. – P.224.

135 Nojiri S., Odintsov S.D., Ogushi S. Cosmological and black hole brane world universe in higher derivative gravity // Phys. Rev. D. – 2002. – Vol. 65. – P. 023521.

136 Nojiri S., Odintsov S.D. Brane-world cosmology in higher derivative gravity or warped compactification in the next-to-leading order of AdS/CFT correspondence // JHEP. – 2000. –Vol.07. – P.049.

137 Neupane I.P. Consistency of higher derivative gravity in the brane background // JHEP. – 2000. – Vol.09. – P.040.

138 Meissner K.A. and Olechowski M. Brane localization of gravity in higher derivative theory // Phys. Rev. D. – 2002. – Vol. 65. – P.064017.

139 Barvinsky A.O., Kamenshchik A.Y. and Starobinsky A.A. Inflation scenario via the standard model Higgs boson and LHC // JCAP. – 2008. – Vol.11.– P.021.

140 Kanti P. Black Holes in Theories with Large Extra Dimensions: a Review // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol.19. – P.4899.

141 Maartens R. Brane -World Gravity // Living Rev. Rel. – 2004. – Vol. 7.

142 Quevedo F. Lectures on string/brane cosmology // Class. Quantum Grav. – 2002. – Vol. 19. – P.5721-5779.

143 Bazeia D., Brito F.A. and Nascimento J.R. Supergravity brane worlds and tachyon potentials // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol.68. – P.085007.

144 Csaki C., Erlich J., Hollowood T.J. and Shirman Y. Universal Aspects of Gravity Localized on Thick Branes // Nucl. Phys. B. – 2000. – Vol.581. – P.309.

145 Kobayashi S., Koyama K. and Soda J. Thick brane worlds and their stability // Phys. Rev. D. – 2002. – Vol.65. – P. 064014.

146 Melfo A., Pantoja N., Skirzewski A. Thick domain wall space-times with and without reflection symmetry // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol.67. – P. 105003.

147 Olasagasti I., Vilenkin A. Gravity of higher-dimensional global defects // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol.62. – P. 044014.

148 Roessl E. and Shaposhnikov M. Localizing gravity on a 't Hooft-Polyakov monopole in seven-dimensions // Phys. Rev. D. – 2002. – Vol.66. – P.084008.

149 Arkani-Hamed N., Schmaltz M. Hierarchies without Symmetries from Extra Dimensions // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol.61. – P.033005; Mirabelli A. and Schmaltz M. A small cosmological constant from a large extra dimension // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol.61. – P.113011.

150 Aguilar S. and Singleton D. Fermions generations, masses and mixing in a 6D brane model // Phys. Rev. D. – 2006. – Vol.73. – P.085007.

151 Deffayet C., Dvali G.R., Gabadadze G. Accelerated universe from gravity leaking

to extra dimensions // *Phys. Rev. D.* – 2002. – Vol.65. – P. 044023.

152 Gogberashvili M., Maziashvili M. Dark matter in the framework of shell-universe // *Gen. Rel. Grav.* – 2005. – Vol.37. – P.1129.

153 Dzhunushaliev V., Folomeev V., Minamitsuji M. Thick brane solutions // *Rept. Prog. Phys.* – 2010. – Vol.73. – P. 066901.

154 Schunck F.E., Mielke E.W. General relativistic boson stars // *Class. Quant. Grav.* – 2003. – Vol.20. – P.301.

155 Herdeiro C. A. R., Pombo A. M. and Radu E. Asymptotically flat scalar, Dirac and Proca stars: Discrete vs. continuous families of solutions // *Phys. Lett. B.* – 2017. – Vol.773. – P. 654 – 662.

156 Dzhunushaliev V., Folomeev V. Dirac star in the presence of Maxwell and Proca fields // *Phys. Rev. D.* – 2019. – Vol. 99. - No.10. – P.104066.

157 V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, B. Kleihaus and J. Kunz, Some thick brane solutions in $f(R)$ -gravity // *Journal of High Energy Physics.* – 2010. – Vol.130. – P.1004.

158 Riess A. and et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // *Astron. J.* – 1998. – Vol. 116, №3. – P.1009 – 1038.

159 Perlmutter S. J. and et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 High – Redshift Supernovae // *Astroph. J.* –1999. – Vol.517. – P.565 – 586.

160 Nojiri S., Odintsov S. D. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models // *Phys. Rept.* – 2011. – Vol. 505. – P. 59–144.

161 Бартини Р.О. Некоторые соотношения между физическими константами (рус.) // *Доклады Академии наук СССР.* — 1965. — Т. 163, № 4. — С. 861 – 864.

162 Нуртаева Г.К., Проценко Н., Идрисов А. «Толстобранные решения в модифицированных теориях гравитации». // *Материалы Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби Әлемі».* – Алматы: Қазақ университеті, 2018. – С.49.

163 Джунушалиев В.Д., Нуртаева Г.К., Проценко Н., Идрисов А. «Бранные решения в модифицированных $f(R)$ гравитациях» // *Материалы Международной конференции «Абдильдинские чтения: Актуальные проблемы современной физики».* – Алматы: Қазақ университеті, 2018. – С.96.

164 Серикболова А.А., Нуртаева Г.К. Flat-symmetric solutions of domain walls in αR^n gravity // *Материалы Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби Әлемі».* – Алматы: Қазақ университеті, 2019. – С.17.

165 Нуртаева Г.К., Серикболова А.А. Thick brane в 6-мерном пространстве – времени // *Материалы Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби Әлемі».* – Алматы: Қазақ университеті, 2019. – С.70.

166 Джунушалиев В.Д., Нуртаева Г.К., Ким С.В., Проценко Н., Идрисов А. Thick brane решения в модифицированных теориях гравитации // *Вестник КазНУ. Серия физическая.* – Алматы, 2018. – Том 66. – №3. – С.12 – 20.

167 Джунушалиев В.Д., Нуртаева Г.К., Серикболова А.А. Плоско-

симметричные решения в $-aR^n$ гравитации // Вестник КазНУ. Серия физическая. – Алматы, 2019. – Том 68. – №1. – С.4 – 12.

168 Джунушалиев В.Д., Фоломеев В., Нуртаева Г.К., Серикболова А.А., Ким С.В. D -браны с коразмерностью 1 в модифицированных гравитациях // Вестник КазНУ. Серия физическая. – Алматы, 2019. – Том 70. – №3. – С.4–12.

169 Dzhunushaliev V., Folomeev V., Nurtayeva G.K., Odintsov S.D. Thick branes in higher – dimensional $f(R)$ gravity // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2020. – Vol. 17, №3. – 2050036 (17 pages).

170 Dzhunushaliev V., Folomeev V., Nurtayeva G.K., Serikbolova A., Sung-Won Kim. Thick branes with codim =1 in modified gravities. // International Journal of Modern Physics A. – 2020. – Vol. 35. Nos. 2 & 3. – 2040019 (4 pages)

171 Кандрашкин Ю.Е. Лекции по системе "Mathematica". – 2005. – www.spinalgebra.com.

172 Доля П.Г. Mathematica для математиков. Часть 4. Решение дифференциальных уравнений – Харьковский Национальный Университет механико-математический факультет. – 2015. – С.1 – 84.

173 Стехина К.Н. Решение дифференциальных уравнений в пакете Mathematica. Часть 1. Уравнения первого порядка и их приложения: учебное пособие / под ред. К.Н. Стехина, Д.Н. Тумаков. – Казань, 2014. – С.116.

174 Baumann Gerd. Mathematica for Theoretical Physics: Second Edition. – Springer –Verlag Heidelberg, 1993.

Приложение

Численные решения в Maple и Wolfram Mathematica

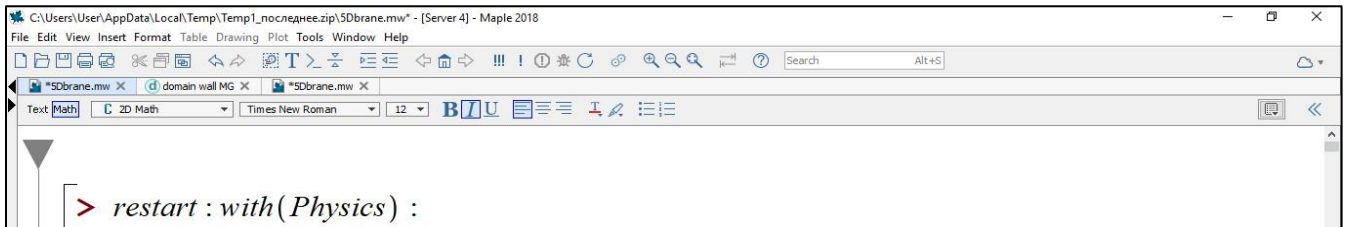
В приложении мы рассмотрим численное решение уравнений, которые были получены в 4 главе с помощью таких пакетов как Maple и Wolfram Mathematica.

Maple - это удобный и мощнейший пакет для аналитических вычислений на компьютере, а также имеет множество программ и функций, благодаря чему он без труда помогает решать сложные задачи алгебры, геометрии, математического анализа, дифференциальных уравнений, статистики, математической физики.

В главе 4 проводились численные расчеты уравнений с помощью пакета Physics. Пакет Physics предназначен для решения системы дифференциальных уравнений, заданных в файле *f* программой MatLab из среды Maple методом, задаваемым аргументом *method* и вывода решения в форме графиков или анимаций.

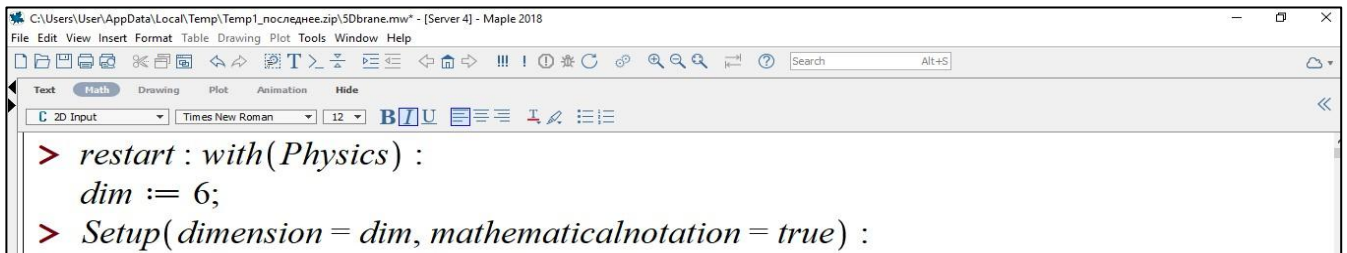
Проанализируем ход получения уравнений для 6-ти мерных *thick brains* полученных в главе 4 с помощью пакета Physics .

Во-первых, из списка пакетов выбираем пакет Physics с помощью следующей команды:



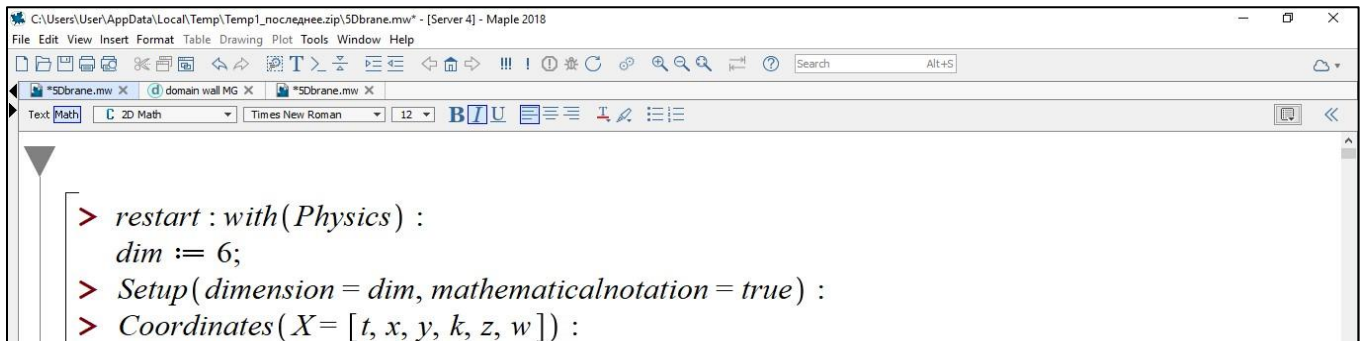
```
> restart : with(Physics) :
```

Затем, необходимо выбрать размерность пространства-времени. В нашем случае это 6.



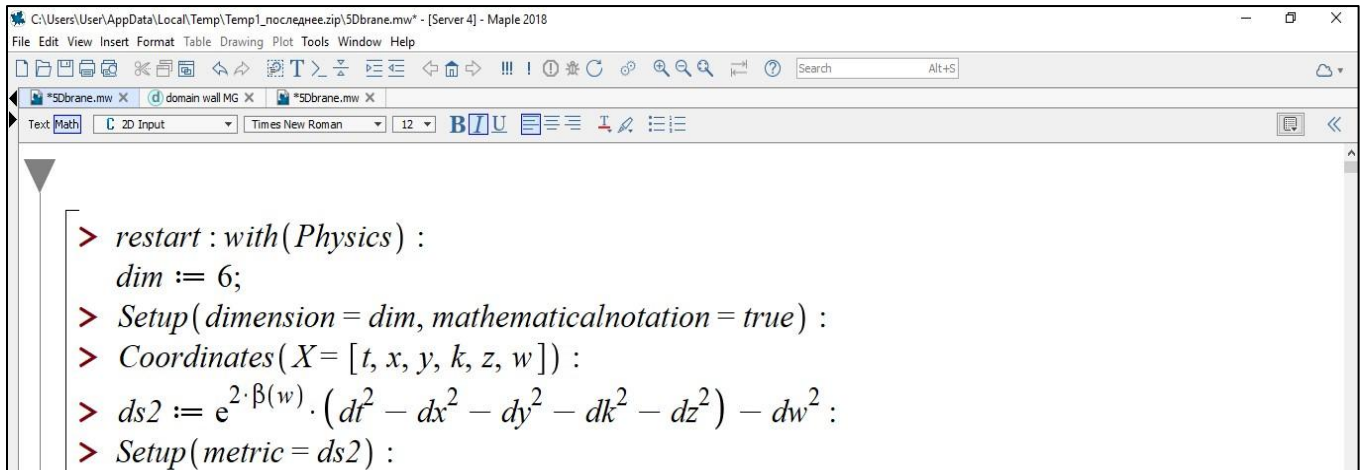
```
> restart : with(Physics) :  
dim := 6;  
> Setup(dimension = dim, mathematicalnotation = true) :
```

Далее вводим соответствующие координаты:



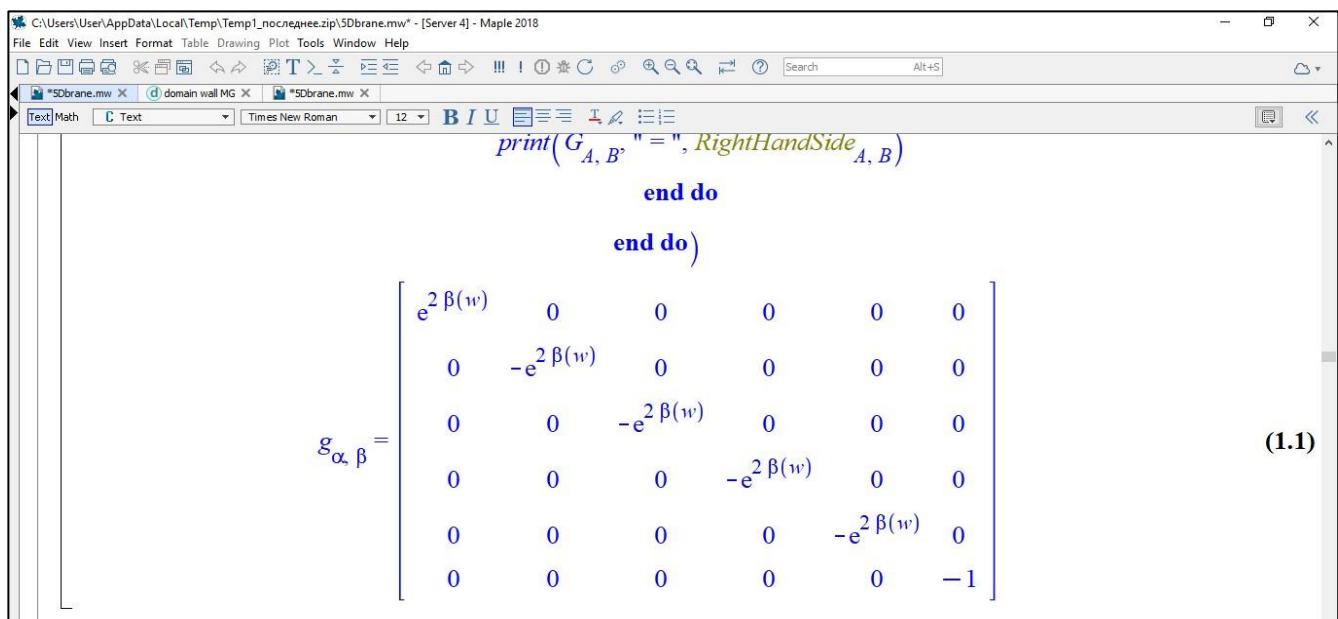
```
> restart : with(Physics) :  
dim := 6;  
> Setup(dimension = dim, mathematicalnotation = true) :  
> Coordinates(X = [t, x, y, k, z, w]) :
```

Для того, чтобы получить соответствующие уравнения необходимо записать метрику, описывающую доменную стенку или толстую брану.

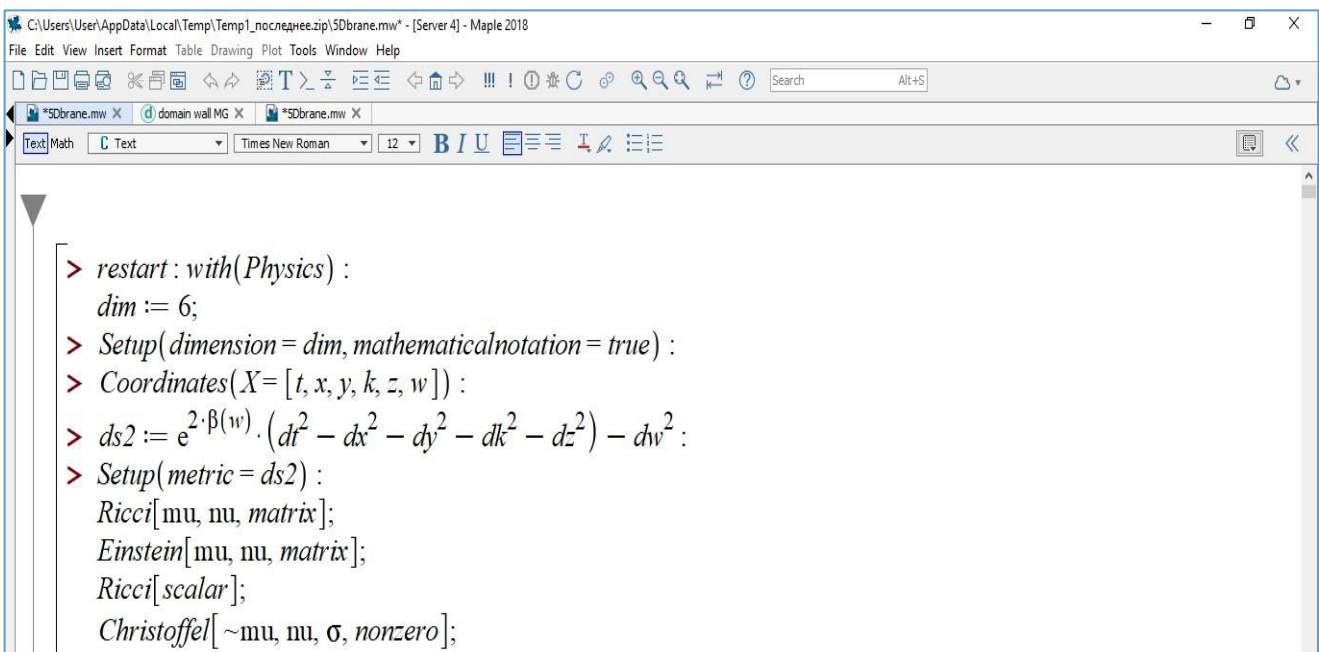


```
> restart : with(Physics) :  
dim := 6;  
> Setup(dimension = dim, mathematicalnotation = true) :  
> Coordinates(X = [t, x, y, k, z, w]) :  
> ds2 := e2·β(w) · (dt2 - dx2 - dy2 - dk2 - dz2) - dw2 :  
> Setup(metric = ds2) :
```

Далее, считаем с помощью команды `g []` получаем явный вид метрического тензора.



После этого, можно получить символы Кристоффеля, Тензор Римана, Риччи и скаляр Риччи и даже посчитать тензор Эйнштейна т.е. левую часть уравнения Эйнштейна:



```

C:\Users\User\Downloads\5Dbrane.mw* - [Server 8] - Maple 2018
File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Tools Window Help
[Icons] Search Alt+S
*5Dbrane.mw X (d) domain wall MG X *5Dbrane.mw X
Text Math C 2D Input Times New Roman 12 B U
> # Здесь метрика присваивается массиву gmcov
gmcov := array(1 ..dim, 1 ..dim) :
RicciMixed := array(1 ..dim, 1 ..dim) :
for i from 1 to dim do
for j from 1 to dim do
gmcov[i, j] := g_[i, j];
#if gmcov[i, j] ≠ 0 then print(metrics, i, j, g_[i, j]) end if;
end do;
end do;
# Здесь находится контравариантная метрика
gContraVar := simplify(Inverse(gmcov)) :
for mu from 1 to dim do
for nu from 1 to dim do
RicciMixed[mu, nu] := add(
gContraVar[mu, rho] · Ricci[rho, nu],
rho = 1 ..dim
);
#if RicciMixed[mu, nu] ≠ 0 then print(mu, nu, RicciMixed[mu, nu]) end if;
end do;
end do;

```

```

C:\Users\User\Downloads\5Dbrane.mw* - [Server 8] - Maple 2018
File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Tools Window Help
[Icons] Search Alt+S
*5Dbrane.mw X (d) domain wall MG X *5Dbrane.mw X
Text Math C 2D Input Times New Roman 12 B U
> # Здесь значения символа Кристоффеля присваиваются массиву Christ
Christ := array(1 ..dim, 1 ..dim, 1 ..dim) :
for mu from 1 to dim do
for nu from 1 to dim do
for sigma from 1 to dim do
Christ[mu, nu, sigma] := simplify(add(
gContraVar[mu, rho] · Christoffel[rho, nu, sigma],
rho = 1 ..dim
));
#if Christ[mu, nu, sigma] ≠ 0 then print(mu, nu, sigma, Christ[mu, nu, sigma]) end if;
end do;
end do;
end do;

```

C:\Users\User\Downloads\5Dbrane.mw* - [Server 8] - Maple 2018

File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Tools Window Help

*5Dbrane.mw X domain wall MG X *5Dbrane.mw X

Text Math 2D Input Times New Roman 12 B U

$$\Gamma^{\mu}_{\nu, \sigma} = \left\{ (1, 1, 6) = \frac{d}{dt} \beta(w), (1, 6, 1) = \frac{d}{dt} \beta(w), (2, 2, 6) = \frac{d}{dt} \beta(w), (2, 6, 2) = \frac{d}{dt} \beta(w), (3, 3, 6) = \frac{d}{dt} \beta(w), (3, 6, 3) = \frac{d}{dt} \beta(w), (4, 4, 6) = \frac{d}{dt} \beta(w), (4, 6, 4) = \frac{d}{dt} \beta(w), (5, 5, 6) = \frac{d}{dt} \beta(w), (5, 6, 5) = \frac{d}{dt} \beta(w), (6, 1, 1) = \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right) e^{2\beta(w)}, (6, 2, 2) = - \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right) e^{2\beta(w)}, (6, 3, 3) = - \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right) e^{2\beta(w)}, (6, 4, 4) = - \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right) e^{2\beta(w)}, (6, 5, 5) = - \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right) e^{2\beta(w)} \right\}$$

$$E_{im} := \left[\left[-10 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 - 4 \frac{d^2}{dt^2} \beta(w), 0, 0, 0, 0, 0 \right], \right. \\ \left[0, -10 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 - 4 \frac{d^2}{dt^2} \beta(w), 0, 0, 0, 0 \right], \\ \left[0, 0, -10 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 - 4 \frac{d^2}{dt^2} \beta(w), 0, 0, 0 \right], \\ \left[0, 0, 0, -10 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 - 4 \frac{d^2}{dt^2} \beta(w), 0, 0 \right], \\ \left[0, 0, 0, 0, -10 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 - 4 \frac{d^2}{dt^2} \beta(w), 0 \right], \\ \left. \left[0, 0, 0, 0, 0, -10 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 \right] \right]$$

$$30 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 + 10 \frac{d^2}{dt^2} \beta(w)$$

Приравняв правую часть и левую части получаем следующие уравнения

C:\Users\User\Downloads\5Dbrane.mw* - [Server 8] - Maple 2018

File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Tools Window Help

*5Dbrane.mw X domain wall MG X *5Dbrane.mw X

Text Math 2D Input Times New Roman 12 B U

systems of spacetime coordinates are: {x = (t, x, y, z, w)}

$$R_{\mu, \nu} = \left[\left[e^{2\beta(w)} \left(5 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 + \frac{d^2}{dt^2} \beta(w) \right), 0, 0, 0, 0, 0 \right], \right. \\ \left[0, -e^{2\beta(w)} \left(5 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 + \frac{d^2}{dt^2} \beta(w) \right), 0, 0, 0, 0 \right], \\ \left[0, 0, -e^{2\beta(w)} \left(5 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 + \frac{d^2}{dt^2} \beta(w) \right), 0, 0, 0 \right], \\ \left[0, 0, 0, -e^{2\beta(w)} \left(5 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 + \frac{d^2}{dt^2} \beta(w) \right), 0, 0 \right], \\ \left[0, 0, 0, 0, -e^{2\beta(w)} \left(5 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 + \frac{d^2}{dt^2} \beta(w) \right), 0 \right], \\ \left. \left[0, 0, 0, 0, 0, -5 \frac{d^2}{dt^2} \beta(w) - 5 \left(\frac{d}{dt} \beta(w) \right)^2 \right] \right]$$


```

C:\Users\User\Downloads\5Dbrane.mw* - [Server 8] - Maple 2018
File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Tools Window Help
C 2D Input Times New Roman 12 B I U
> RightHandSide := array(1 ..dim, 1 ..dim) :
  for A from 1 to dim do
  for B from 1 to dim do
  RightHandSide[A, B] := -simplify(fR·RicciMixed[A, B] - 1/2·KroneckerDelta[A, B]·f +
  add(
  add(
  (KroneckerDelta[A, B]·gContraVar[L, M] - KroneckerDelta[L, A]·gContraVar[B, M])·
  (
  diff(diff(Ricci[scalar], X[M]), X[L])·fRR + diff(Ricci[scalar], X[L])·fRRR·diff(Ricci[scalar], X[M]) - add(Christ[N, L, M]·diff(Ricci[scalar],
  X[N])·fRR,
  N = 1 ..dim)
  ),
  L = 1 ..dim),
  M = 1 ..dim);
  # if RightHandSide[A, B] ≠ 0 then print(RightHandSide[A, B]) end if;
  end do
  end do;
> for A from 1 to dim do
  for B from 1 to dim do
  print(Em[A, B], "=", RightHandSide[A, B]);
  end do
  end do;

```

```

C:\Users\User\Downloads\5Dbrane.mw* - [Server 6] - Maple 2018
File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Tools Window Help
C 2D Output Times New Roman 12 B I U
-10 (d/dz beta(z))^2 - 4 d^2/dz^2 beta(z), "=", 10 (d^4/dz^4 beta(z))fRR + 100 (d^3/dz^3 beta(z))^2 fRRR + 100 (d/dz beta(z)) (12 fRRR (d^2/dz^2 beta(z)) + fRR) (d^3/dz^3 beta(z))
  (-7200 fRRR (d/dz beta(z))^2 - 120 fRR (d^2/dz^2 beta(z))^2 - (-480 fRR (d/dz beta(z))^2 + 2 fR) (d^2/dz^2 beta(z)) - 5 (d/dz beta(z))^2 fR + f/2
  -10 (d/dz beta(z))^2 - 4 d^2/dz^2 beta(z), "=", 10 (d^4/dz^4 beta(z))fRR + 100 (d^3/dz^3 beta(z))^2 fRRR + 100 (d/dz beta(z)) (12 fRRR (d^2/dz^2 beta(z)) + fRR) (d^3/dz^3 beta(z))
  (-7200 fRRR (d/dz beta(z))^2 - 120 fRR (d^2/dz^2 beta(z))^2 - (-480 fRR (d/dz beta(z))^2 + 2 fR) (d^2/dz^2 beta(z)) - 5 (d/dz beta(z))^2 fR + f/2
  -10 (d/dz beta(z))^2 - 4 d^2/dz^2 beta(z), "=", 10 (d^4/dz^4 beta(z))fRR + 100 (d^3/dz^3 beta(z))^2 fRRR + 100 (d/dz beta(z)) (12 fRRR (d^2/dz^2 beta(z)) + fRR) (d^3/dz^3 beta(z))
  (-7200 fRRR (d/dz beta(z))^2 - 120 fRR (d^2/dz^2 beta(z))^2 - (-480 fRR (d/dz beta(z))^2 + 2 fR) (d^2/dz^2 beta(z)) - 5 (d/dz beta(z))^2 fR + f/2
  -10 (d/dz beta(z))^2 - 4 d^2/dz^2 beta(z), "=", 10 (d^4/dz^4 beta(z))fRR + 100 (d^3/dz^3 beta(z))^2 fRRR + 100 (d/dz beta(z)) (12 fRRR (d^2/dz^2 beta(z)) + fRR) (d^3/dz^3 beta(z))
  (-7200 fRRR (d/dz beta(z))^2 - 120 fRR (d^2/dz^2 beta(z))^2 - (-480 fRR (d/dz beta(z))^2 + 2 fR) (d^2/dz^2 beta(z)) - 5 (d/dz beta(z))^2 fR + f/2
  -10 (d/dz beta(z))^2 - 4 d^2/dz^2 beta(z), "=", -5 (d/dz beta(z))^2 fR - 5 (d^2/dz^2 beta(z)) fR + f/2 + 300 (d^2/dz^2 beta(z)) (d/dz beta(z))^2 fRR + 50 (d/dz beta(z)) (d^3/dz^3 beta(z)) fRR (1)

```

После подстановки выражения для скаляра Риччи и вспомнив, что мы исследуем $f(R)$ гравитацию в виде $f(R) = -\alpha R^n$:

```

C:\Users\User\Desktop\DISSER\MAPLE\DIFF brane 1.mw* - [Server 7] - Maple 2018
File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Tools Window Help
Start.mw X SDbbrane.mw X стенога.mw X domain wall MG X *SDbbrane.mw X *DIFF brane 1.mw X
Text Math C 2D Output Times New Roman 12 B I U
> R := Ricci[scalar];
R := 30 \left( \frac{d}{dw} \beta(w) \right)^2 + 10 \left( \frac{d^2}{dw^2} \beta(w) \right) (2)
> f := -\alpha \cdot R^n;
f := -\alpha \left( 30 \left( \frac{d}{dw} \beta(w) \right)^2 + 10 \left( \frac{d^2}{dw^2} \beta(w) \right) \right)^n (3)
> fR := -n \cdot \alpha \cdot R^{n-1};
fR := -n \alpha \left( 30 \left( \frac{d}{dw} \beta(w) \right)^2 + 10 \left( \frac{d^2}{dw^2} \beta(w) \right) \right)^{n-1} (4)
> fRR := -n \cdot (n-1) \cdot \alpha \cdot R^{n-2};
fRR := -n (n-1) \alpha \left( 30 \left( \frac{d}{dw} \beta(w) \right)^2 + 10 \left( \frac{d^2}{dw^2} \beta(w) \right) \right)^{n-2} (5)

```

Для получения профиля решений мы используем графики решений данных уравнений в пакете символьных вычислений Wolfram Mathematica.

Переходя к нашей задаче можно построить графики для 6 – ти мерной браны:

```

phase portrait -2 CORRECT.nb - Wolfram Mathematica 11.2
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

Clear["Global`*"];
Clear[y];
\delta = 0.01;
n = 7;
n = 4;
\beta = \frac{2+n-1}{n-1};
\alpha = 1;
y0 = 1;
ys = Table[y, {y, 1, 10, 1}];
getSolutions[zMin_, zMax_, ys_] :=
Table[NSolve\left\{y''[z] - \frac{1}{n} y'[z]^2 + \left(5 - \frac{2n-5}{n(n-1)}\right) y'[z] y''[z] - \frac{5}{2} \frac{(n-1)}{n(n-1)} y'[z]^3 - \frac{12 y'[z]}{(n^8 n(n-1))} \left(y''[z] + \frac{5}{2} y'[z]^2\right)^{2n} == 0, y[\delta] = y0, y'[\delta] = \gamma \beta \delta^{n-1}, y''[\delta] = (\beta-1) \gamma \beta \delta^{n-2}\right\}, y, {z, zMin, zMax}] // First,
{y, ys}
];
{zMinLeft=-5;
zMaxLeft=-5};
zMinRight = \delta;
zMaxRight = 5;
(*solutionsLeft=getSolutions[zMinLeft,zMaxLeft,ys];*)
solutionsRight = getSolutions[zMinRight, zMaxRight, ys];
plotRange = {-2, 3, All};
(*getPlotsRe[solutions_List, zMin_, zMax_] := Map[ParametricPlot[Re[y'[z], y''[z]] /. solutions[[#]], {z, zMin, zMax}, AxesLabel -> {"p", "v"}, PlotStyle -> styles[[#]], PlotRange -> plotRange, PlotLegends -> plotLegends[[#]] &, indices];*)
getPlots[solutions_List, zMin_, zMax_] :=
Map[ParametricPlot[y'[z], y''[z]] /. solutions[[#]], {z, zMin, zMax}, AxesLabel -> {"y'", "y''"}, PlotStyle -> styles[[#]], PlotRange -> plotRange, PlotLegends -> plotLegends[[#]] &, indices];
(*Можно все решения вывести на одном графике*)
styles = {{Brown, Dashed}, {Orange, Dotted}, {Pink}, {Purple}, {Red}, {Green}, {Blue}, {Black}, {White}, {Gray}, {Cyan}, {Magenta}, {Yellow}};
indices = Table[n, {n, Length[ys]}];

```

phase portrait-2 CORRECT.nb - Wolfram Mathematica 11.2

```

(=getPlots[solutions_List, zMin_, zMax_] := Map[ParametricPlot[Re[{y'[z], y''[z]}] /. solutions[[#]], {z, zMin, zMax}, AxesLabel -> {"p", "v"}, PlotStyle -> styles[[#]], PlotRange -> plotRange, PlotLegends -> plotLegends[[#]] &, indices]; *)

getPlots[solutions_List, zMin_, zMax_] :=
Map[ParametricPlot[{y'[z], y''[z]} /. solutions[[#]], {z, zMin, zMax}, AxesLabel -> {"y'", "y''"}, PlotStyle -> styles[[#]], PlotRange -> plotRange, PlotLegends -> plotLegends[[#]] &, indices];
(«Можно все решения вывести на одном графике»)
styles = {{Brown, Dashed}, {Orange, Dotted}, {Pink}, {Purple}, {Red}, {Green}, {Blue}, {Black}, {White}, {Gray}, {Cyan}, {Magenta}, {Yellow}};
indices = Table[n, {n, Length[ys]}];
styles = Map[styles[[Mod[n, Length[styles]] + 1] &, indices];
plotLegends = Map["γ = " <> ToString[n] &, ys];

(*К сожалению, PlotLegends не дружит с ParametricPlot потому на данном графике нельзя будет разобрать какому γ принадлежит линия*)
(*У тебя слева решение мнимое, поэтому я беру от решения только действительную часть*)
Show[Join[(getPlots[solutionsLeft, zMinLeft, zMaxLeft], *)], getPlots[solutionsRight, zMinRight, zMaxRight]]]

```

phase portrait -alpha 10.nb - Wolfram Mathematica 11.2

```

Clear["Global`*"];
Clear[y];
δ = 0.01;
n = 7;
α = 10; γ = 10; xMax = 5;
y0 = 1;
eq = NDSolve[{y'''[z] - 1/2 y''[z]^2 + (5 - 2α/n) y'[z] y''[z] - 5/(2(n-1)) y'[z]^3 - 12y'[z]/(α^2 n(n-1)) (y''[z] + 5/2 y'[z]^2)^{2-n} == 0, y[δ] = y0, y'[δ] = γ β δ^{β-1}, y''[δ] = (β-1) γ β δ^{β-2}}, y, {z, δ, xMax}];
Plot[{y[z] /. eq, y'[z] /. eq, y''[z] /. eq}, {z, δ, xMax}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Dotted}, PlotLegends -> Placed[{"y[z]", "y'[z]", "y''[z]"}, {Scaled[{0.8, 0.5}], {0.5, -0.1}}],
PlotStyle -> {{Thick, Thickness[0.01]}, {Dashing[{Small, Medium}], Thickness[0.01]}, {Dotted, Thickness[0.01]}}, GridLines -> Automatic];
Plot[{y'[z]^2 /. eq}, {z, δ, xMax}, PlotRange -> All];

```



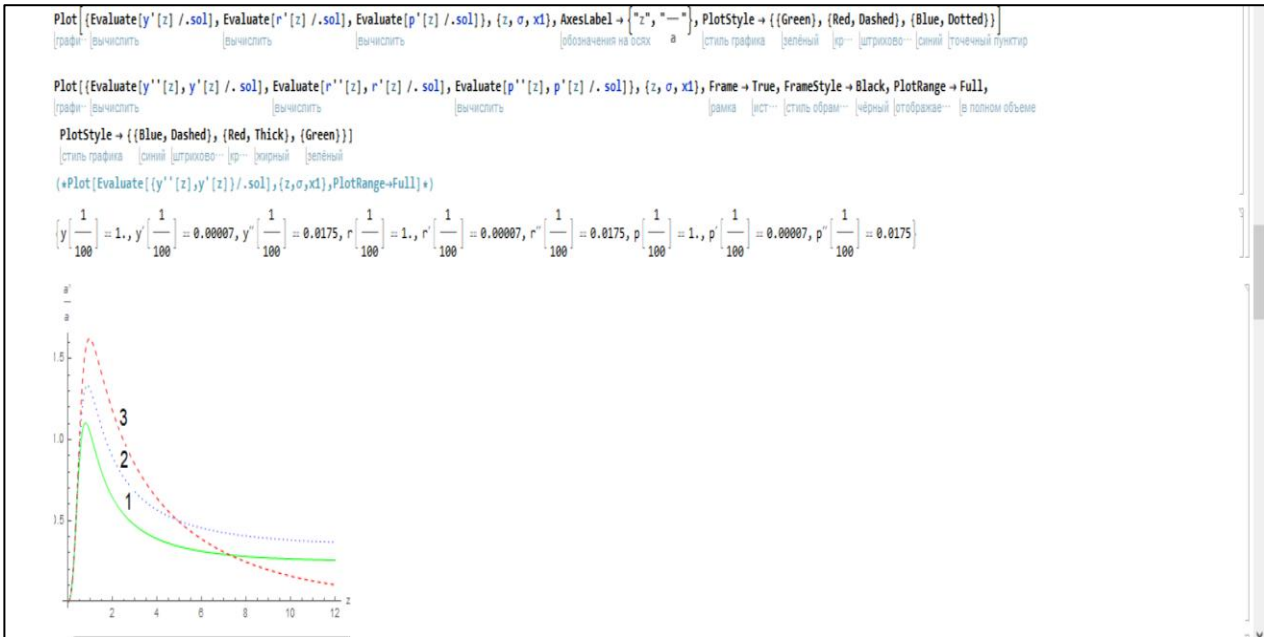
```

30.10.2018 Задача.nb * - Wolfram Mathematica 11.2
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

n = 5;
3
7
β = -;
2
α = 1.;
σ = 10-2;
x1 = 12.;
y0 = 1.;
r0 = 1.;
p0 = 1.;
γ = 2.;

eqs = {y''''[z] -  $\frac{3(-3+n)}{(-1+n)n} y'[z]^2 - \left(\frac{10}{-1+n} - \frac{6}{(-1+n)n} - \frac{6n}{-1+n}\right) y'[z] y''[z] - \frac{1}{n} \frac{y''[z]^2}{y'[z]} - (30y'[z]^2 + 10y''[z])^{-n} \left(\frac{180y'[z]^5}{(-1+n)n\alpha} + \frac{120y'[z]^3 y''[z]}{(-1+n)n\alpha} + \frac{20y'[z] y''[z]^2}{(-1+n)n\alpha}\right) == 0,$ 
r''''[z] -  $\frac{2(-2+n)}{(-1+n)n} r'[z]^2 - \left(\frac{7}{-1+n} - \frac{4}{(-1+n)n} - \frac{4n}{-1+n}\right) r'[z] r''[z] - \frac{1}{n} \frac{r''[z]^2}{r'[z]} + (12r'[z]^2 + 6r''[z])^{-n} \left(\frac{24r'[z]^5}{(-1+n)n\alpha} + \frac{24r'[z]^3 r''[z]}{(-1+n)n\alpha} + \frac{6r'[z] r''[z]^2}{(-1+n)n\alpha}\right) == 0,$ 
p''''[z] -  $\frac{1+p''[z]^2}{n+p'[z]} + \left(5 - \frac{7n-5}{n(n-1)}\right) p'[z] + p''[z] - \frac{5 \cdot \left(\frac{n-5}{2}\right)}{2+n+(n-1)} p'[z]^3 = \frac{12+p'[z]}{\alpha+8+n+(n-1)} \left(p''[z] + \frac{5}{2} p'[z]^2\right)^{2-n};$ 
bc = {y[σ] = y0 + γ + σδ, y'[σ] = β + γ + σβ-1, y''[σ] = β + (β-1) + γ + σβ-2, r[σ] = r0 + γ + σδ, r'[σ] = β + γ + σβ-1, r''[σ] = β + (β-1) + γ + σβ-2, p[σ] = p0 + γ + σδ, p'[σ] = β + γ + σβ-1, p''[σ] = β + (β-1) + γ + σβ-2};
sol = NDSolve[{eqs, bc}, {y, r, p}, {z, σ, x1}];

```



Численно исследованы 4-мерные доменные стенки и модели 5 и 6-мерной толстой браны в $-\alpha R^n$ гравитации. Были получены регулярные, плоско-симметричные решения в вакууме. Это следует из аналитического анализа поведения решений в окрестности этой точки, так как, такая точка существует только при определенных значениях параметра n т. е. $1 < n < 2, \delta > 3$.

Были получены фазовые портреты для 4-х мерной доменной стенки, 5 и 6 - мерной модели браны, а также график масштабных факторов. Полученные решения толстой браны и доменных стенок могут стать интересной моделью для космологических исследований.